飞行器气动弹性力学

（2009版）

杨智春　赵令诚　编著

西北工业大学航空学院

2009年7月

前　言

飞行器气动弹性力学是飞行器设计工程领域中的一门交叉学科，它研究的对象是作用在飞行器升力面上的气动力、飞行器结构的弹性力和惯性力三者之间相互作用的关系以及对飞行器设计的影响。

在以飞机为代表的飞行器设计工程中，气动弹性力学占据着重要的地位。从总体设计开始，到原型机通过定型，其整个设计过程中的每一个环节都要进行飞行器气动弹性特性的理论计算和实验研究。尤其是对于新型号飞行器的研制，气动弹性特性更是制约飞行器性能的一个重要环节。

随着飞行器速度的不断提高和飞行器结构重量及刚度的不断减小，飞行器气动弹性问题在飞行器设计中也越来越突出。特别是近年来，我国航空航天事业的蓬勃发展，飞行器设计中的气动弹性问题得到了前所未有的重视，极大地推动了我国飞行器气动弹性力学的研究和发展，也对飞行器气动弹性力学的研究提出了新的课题和新的要求。飞行器气动弹性力学经过半个多世纪的发展，形成了飞行器设计工程中一门既系统完整又不断发展的学科，它不仅在飞行器设计领域不断推出新的研究方向，而且其基本原理和基本理论也已经被拓展应用到土木工程、电力工程等民用工程的相关问题研究中，如在大风地区的高层建筑、大跨度桥梁、冷却塔、输电缆的设计等，都必须考虑气动弹性问题。

由此可见，作为飞行器设计与工程专业的学生，学习飞行器气动弹性力学的基本原理和方法，对于今后从事飞行器设计或其它相关工程结构的设计工作大有裨益。作为一门专业选修课程，为了在有限的时间里，使读者了解飞行器气动弹性力学的主要研究内容、原理、方法以及它在飞行器（飞机）设计工程中的一些具体应用，我们编写了《飞行器气动弹性力学》这本讲义。讲义中涉及的内容都是飞行器气动弹性力学研究中一些基础的问题，而作为一门工程性很强的学科，在进行实际飞行器的气动弹性特性分析时，还需要结合飞行器气动弹性工程分析经验和相关学科的知识，综合运用飞行器气动弹性力学的基础理论，才能解决飞行器气动弹性设计中的具体问题，这也是我们编写这本讲义的根本目的。

正如一位世界著名的气动弹性力学专家所说那样——“气动弹性力学是科学与艺术的结合”。我们可以这样理解：飞行器气动弹性力学问题的研究需要综合运用其基础理论（科学），结合具体飞行器设计工程中的实践经验（艺术），才能得到飞行器最佳的气动弹性设计方案。

由于课时限制，本讲义仅仅涉及飞行器气动弹性分析与设计中一些基本的概念、原理、方法及技术。共由十章组成，前六章介绍飞行器气动弹性力学的基本概念原理和计算方法，后四章着重介绍飞行器气动弹性设计的一个重要内容——颤振设计的工程应用中的一些具体问题以及一些特殊的气动弹性问题。

第一章简要介绍飞行器气动弹性力学概念、研究的内容和研究方法的特点以及气动弹性

力学的发展历史；

第二章介绍二元机翼的气动弹性静力学问题，包括二元机翼的载荷重新分布和扭转发散问题、二元机翼的副翼效率和副翼操纵反效问题；

第三章介绍三元机翼的气动弹性静力学问题，包括三元机翼的定常气动力影响系数矩阵计算、三元机翼的柔度影响系数矩阵计算、三元机翼的载荷重新分布与扭转发散、三元机翼的副翼操纵效率和副翼操纵反效问题；

第四章介绍颤振的基本概念和机理，包括经典弯扭耦合型颤振的机理、机翼弯曲/副翼偏转型颤振的机理、频率重合理论以及设计参数对颤振的定性影响；

第五章介绍二元机翼颤振分析的基本方法，包括不可压缩气流中振动二元机翼的准定常气动力和非定常气动力计算方法、颤振方程求解方法。着重介绍西奥道生理论和减缩频率的概念以及求解颤振临界速度的$V-g$法和p-k法的基本原理与步骤；

第六章介绍三元机翼颤振的计算方法并简要介绍了简谐振动机翼的非定常气动力计算方法以及超声速气动力计算的活塞理论；

第七章介绍飞机操纵面颤振设计和分析中的问题，主要包括运用质量平衡概念，采用配重设计来消除操纵面颤振的原理和方法，以及一些具体的设计实例；

第八章介绍飞机设计工程中防颤振设计的一般步骤和飞机强度规范中有关防颤振设计的相关条款；

第九章简要介绍带外挂物机翼的颤振、全动尾面的颤振、T型尾翼的颤振、操纵面嗡鸣和失速颤振等非经典颤振问题以及抖振问题；

第十章简要介绍飞机防颤振设计中的相关试验工作，包括飞机全机地面振动试验、低速和高速风洞的颤振模型试验及飞机的飞行颤振试验。

第十一章简要介绍气动伺服弹性力学的相关概念和气动伺服弹性稳定性分析的频域分析方法和时域分析方法。

目　录

第一章　绪论

顾名思义，气动弹性力学是研究弹性体在气流作用下的力学行为的一门学科。弹性体在气动载荷作用下会发生变形或振动，而弹性体的变形或振动运动，反过来又会影响作用在弹性体上的气动载荷的大小与分布，正是这种气流与结构的交互作用，使得结构在气流中产生各种各样的气动弹性现象。在工程技术界，除航空航天领域的飞行器结构外，民用工程领域的桥梁（主要是悬索桥）以及烟囱、高塔、高楼等高耸结构会产生气动弹性问题。在现代的飞行器设计中，为了达到高速和高机动飞行的目标，飞行器自身的结构重量以及结构的刚度相对地越来越小，因此，其发生气动弹性问题的可能性越来越大。可以说，气动弹性的观点越来越成为现代飞行器及许多民用建筑结构进行安全设计和优化设计的制约因素。本讲义仅涉及飞行器气动弹性问题，如上所述，飞行器的气动弹性问题是指飞行器惯性力、弹性力和气动力的相互作用问题。

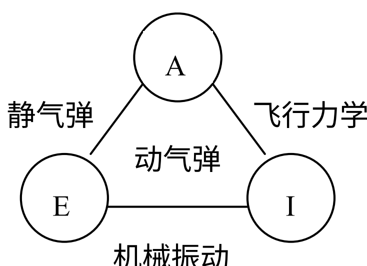


图 1-1　Collar 气动弹性力三角形

“气动弹性力学”这个概念，是二十世纪三十年代首先由航空工程师提出的，目前已发展成为一门独立的学科。它是建立在弹性力学、空气动力学、结构振动理论这些专门学科基础上的一门交叉学科。1946年，英国学者Collar绘制出了表明气动弹性力学所涉及的各个学科间相互联系的所谓“气动弹性力三角形”，使气动弹性问题有了明确的分类，这个三角形直观地表达了气动弹性问题中各种力之间的联系，也区分了各学科的研究范畴，如图1-1所示，Collar三角形的三个顶点分别代表气动力（A）、弹性力（E）和惯性力（I）。把三角形任意两个角点联系起来，都形成一个重要的学科。

例如，把气动力和弹性力联系起来，就是通常称之为气动弹性静力学（简称“静气弹”）的研究内容。对于飞机的气动弹性静力学问题，它主要包含了机翼的静力扭转发散、操纵面反效、机翼气动载荷重新分布以及飞机的飞行静稳定性等问题。进一步我们知道，不但机翼的静变形会引起附加的气动力，机翼的弹性变形和运动也会引起附加的气动力，而附加的气动力又会使机翼结构产生附加的弹性变形和运动，因此，在这种情况下，不仅要考虑气动力和弹性力之间的相互作用，还要考虑它们和惯性力之间的相互作用，在Collar气动弹性力三角形中，把气动力、弹性力、惯性力联系起来，就是气动弹性动力学（简称“动气弹”）研究

的内容。对飞机气动弹性动力学问题，主要包括机翼颤振、操纵面嗡鸣、抖振、飞机的突风响应等研究内容。此外，在直升机旋翼桨叶、涡轮机叶片的设计中，都同样存在气动弹性问题。其实，连接Collar气动弹性力三角形的任意两个角点都可以形成一个独立的学科，并且都可以认定它们是气动弹性力学的一个特殊分支，仅仅是由于历史的原因，研究弹性力与惯性力耦合的机械振动与研究惯性力与气动力耦合的飞行力学早已成为两门独立的学科，只有气动弹性静力学问题与气动弹性动力学问题两部份内容才形成了通常所谓的气动弹性力学这一特定的学科。由此可见，气动弹性力学实际上是跨越了三个完全独立的学科。

气动弹性力学的研究方法，也具有其自身的特点。我们知道，弹性（结构）力学的经典理论是研究弹性体（结构）在给定的外力或位移作用下的应力与应变（变形）。在一般情况下，施加在弹性体（结构）上的外作用力与变形无关，并且通常认为小变形不影响外力的作用。但在大多数气动弹性问题中，认为外力（空气动力）是随着弹性体的变形情况（包括变形、变形速度、变形加速度）而改变的，即气动力本身不是事先可以确定的，弹性变形对它起着重要作用，在问题完全解出之前，外力不是已知的。这就是气动弹性问题的研究特点。

气动弹性力学关心的主要问题之一是弹性结构在气流中的稳定性。因为对一定的结构，作用于其上的空气动力将会随着气流速度的增加而增加，而弹性结构的刚度却与气流速度无关，所以可能存在一个临界气流速度，在此速度下，结构成为变形不稳定的。根据惯性力是否允许忽略，这种不稳定性又可区分为静力不稳定性和动力不稳定性。前者主要是静力扭转发散问题，后者主要是颤振问题，静力不稳定性和动力不稳定性都将会使结构产生极大的变形，并最终导致结构的破坏，这在飞机设计中是决不允许的。当然，气动弹性力学还研究飞行器的其它许多问题，如气动弹性静力学中的气动载荷重新分布问题，操纵面的操纵效率和操纵反效问题，以及气动弹性动力学中的飞行器对外载荷的动力响应问题，由操纵面偏转、突风、机炮射击等引起的响应都属于这类问题。

在民用工程领域中著名的气动弹性事故，是1940年美国的塔科玛悬桥在42哩/小时（约18.7米/秒）的风速下发生剧烈振动而毁坏，事后的研究确认了这是一种与机翼颤振类似的事故，由此促使人们在桥梁工程等民用工程结构设计中开始考虑气动弹性问题。

随着飞机设计的发展，气动弹性问题在飞机设计中的地位也发生了深刻的变化。在飞机设计技术发展的早期，气动弹性问题尚未被重视与掌握，因而曾相继发生各种由于气动弹性问题而导致的严重飞行事故。第一次世界大战期间，飞机设计由双翼机向单翼悬臂机翼发展时，因载荷重新分布问题的出现，导致多架福克D-8飞机在高速俯冲时因机翼毁坏而失事。临近第二次世界大战时期，新型飞机迅猛发展，飞机柔性相对增大，由于操纵面和尾翼颤振引起的飞行事故经常发生，对这些问题的深入研究使得气动弹性力学开始发展成为一门独立的学科。到第二次世界大战末期，飞机的速度突破了音速，舵面效率又成为气动弹性力学研究的新问题。对于现代高速飞机，由于飞机性能的发展，薄翼和细长机身的大量采用，使得气动弹性稳定性问题几乎成为所有飞机机翼的临界设计条件之一。特别是现代战斗机，为了尽

量加大推重比而严格控制飞机的结构重量，飞机结构柔性的相对增加，使气动弹性稳定性成为飞机设计中一个很突出的问题。

总之，气动弹性问题往往是飞机设计中的不利因素，甚至极为有害。学习气动弹性力学课程的主要目的，就在于掌握气动弹性问题的基本原理和研究方法，研究气动弹性效应对飞机设计的影响，寻求减轻或避免其破坏作用的技术途径。

第二章　二元机翼的气动弹性静力学问题

§2.1 引言

在气动弹性静力学问题中，主要研究弹性结构在气动力和弹性力相互作用下的力学行为，即研究结构的弹性变形对定常气动升力分布的影响，以及在气动力作用下，结构产生的静变形及其稳定性。在研究气动弹性静力学问题时，通常认为结构的静变形是一个缓慢的过程，所以运动引起的附加气动力很小，可以忽略不计。即在气动弹性静力学问题中，气动力可以采用定常空气动力学理论来计算，且时间不作为一个独立的变量来考虑。从气动弹性力学及飞机设计的观点看，这方面的研究对飞行器中升力面和操纵面的结构设计具有特别重要的意义。从数学解析的观点看，表达气动弹性静力学问题的数学方程是比较简单的，按定义，这时的气动弹性静力学方程中不出现时间这个自变量，在结构的力平衡方程中，不出现惯性力项。

气动弹性静力学问题的主要研究内容可分为两类：第一类是气动载荷重新分布问题；第二类是操纵面的操纵效率和操纵反效问题。气动弹性静力学问题主要对大展弦比升力系统有意义。因此我们以具有典型代表意义的二元机翼作为开始分析的对象，这既不影响所研究问题的实质，又便于理解气动弹性静力学问题的现象和机理。随后研究长直机翼气动弹性静力学问题的计算方法，最后推广到三元机翼气动弹性静力学问题的求解。

容易理解的是，就产生空气动力这一点而言，飞机在静止的空气中以某一速度飞行（即飞机的实际飞行），与静止飞机处于相同速度的气流中（如气动弹性问题研究的各种风洞模型试验），效果是完全一样的，今后为了研究和叙述上的方便，在后面各章节的讨论中，除非专门说明，我们都将采用风洞模型试验的情形，即不用“飞机速度”这一术语，而采用“气流速度”或“风速”这一术语。

§2.2 二元机翼的扭转发散问题

在本节中，我们先以二元机翼为研究对象来讨论气动弹性静力学问题，可以对气动弹性静力学问题有一个比较清楚的认识。

所谓二元机翼，是指这样一种假想机翼，它的每个剖面都是相同的，各剖面之间没有相对的移动和转动，机翼的弯曲和扭转变形可以分别用机翼刚轴（弹性轴）的上下平移变形及绕刚轴的转动变形来表示。但在气动弹性静力学问题中，机翼的上下平移变形并不引起附加的气动力，故上下平移变形可以不考虑。因此，在研究气动弹性静力学问题时，二元机翼可以用一个刚硬二元翼段（通常展向长度取为单位长度）来表示。从而，在气动弹性静力学问题中，二元机翼和二元翼段是同义的，在实际研究时，只需画出其一个剖面（翼型）即可，

如图2-1所示。二元机翼的扭转刚度通常用一个可提供扭转恢复力矩的扭转弹簧来表示。

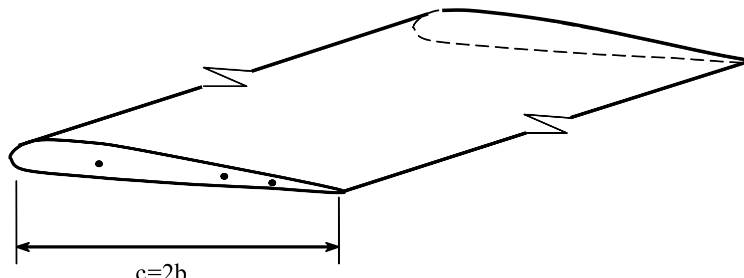


图2-1 二元机翼

一、物理现象

设想将上述二元机翼安装在风洞中，扭转弹簧一端固定在风洞壁上，另一端固定在机翼刚心处。使整个机翼连同刚心处的扭转弹簧一起扭转一个初始角度（初始攻角）α_0，然后开启风洞，设风速为V，由于机翼是通过扭转弹簧弹性连接在洞壁上的，所以在气动力（表现为对刚心的气动力矩）作用下机翼的攻角会增大，而同时机翼又受到一个弹簧恢复力矩的作用，在风速不太大时，在气动力矩和弹簧恢复力矩的共同作用下，机翼将在一个新的攻角$\alpha=\alpha_0+\theta$下达到平衡（如图2-2所示），显然，附加的攻角θ是因为机翼具有弹性支持而产生的扭转变形，正是这个扭转变形体现了机翼结构在气流中的弹性体效应，即气动弹性效应。如果弹簧刚度很大，或者风洞的风速很低，则扭转角θ会很小；如果弹簧刚度很小，或者风洞的风速很高，则扭转角θ会很大，甚至扭转弹簧会扭转到超过其弹性极限而导致破坏。现在我们假定弹簧刚度保持为K_θ，如果风速为V时处于平衡状态机翼的扭转角θ很小，则当我们开始加大风速时，会看到机翼的扭转角会逐渐增大，当风速增大到某一较高值时，机翼的扭转角会突然增大甚至使机翼发生翻转。这种现象，就是通常所称的“扭转发散”，又称为“静发散”或“发散”。由此可知，当弹簧刚度一定时，附加攻角θ的大小与气流速度有密切关系。前面提到的使机翼产生发散失稳的那一个较高的风速，在气动弹性静力学问题中，用一个术语来表述，称为“扭转发散临界速度”或简称“发散速度”，记为V_D。上述过程也可以用下面的符号来表达：

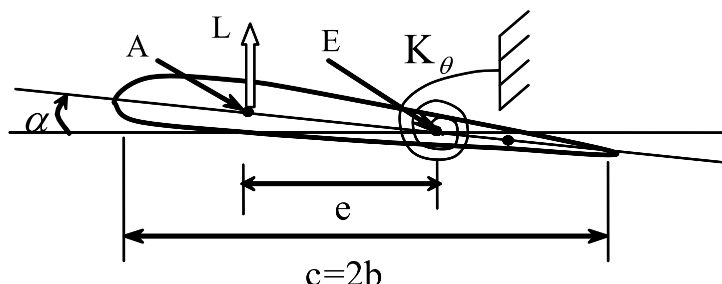


图2-2 弹性支持的二元机翼

二、扭转发散临界速度

研究气动弹性静力学的目的之一就是要解出某一给定机翼的扭转发散临界速度，分析影响扭转发散临界速度大小的诸多因素，找到提高扭转发散临界速度的设计措施。

对于二元机翼的扭转发散问题，由于不涉及操纵面的偏转，从而在研究时可设操纵面偏转为零，也不必将其在翼剖面中画出。如图2-2所示，设机翼未发生扭转时的初始攻角为α_0，由气动力理论知，翼型（二元机翼）上二元（平面）流动的气动力可以表示为作用于气动中心A的升力L（向上为正）和绕气动中心A的气动力矩M_A（使机翼抬头为正），而且根据薄翼理论，绕气动中心A的气动力矩与攻角大小无关。由于气动力与气动力矩对刚心的力矩作用会使机翼绕其刚心发生扭转，记扭转引起的附加攻角为θ，则机翼在气流中由于气动弹性效应的总攻角α为：

$$\alpha = \alpha_0 + \theta \tag{2.1}$$

气动升力和绕刚心的气动力矩分别为：

$$\begin{aligned} L &= C_L qS = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta) qS \\ M_E &= M_A + L \cdot e \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中，C_L为升力系数，$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$为升力系数的导数，$\rho$为空气密度，$V$为风速，$q = \frac{1}{2}\rho V^2$为速压（动压），$S$为机翼面积，$e$为机翼的气动中心到机翼刚心的距离，且刚心在气动中心之后时e为正。

假定机翼在扭转变形到θ角时达到平衡，则根据气动力矩与弹性恢复力矩相平衡的条件，可写出对刚心E点的力矩平衡方程为：

$$\begin{aligned} K_\theta \theta &= M_A + L \cdot e \\ &= M_A + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta) qSe \end{aligned} \tag{2.3}$$

上式移项整理后可得：

$$(K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe)\theta = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe\alpha_0 + M_A \tag{2.4}$$

由此可解出考虑气动弹性效应后，机翼的实际弹性扭转角为：

$$\theta = \frac{(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe\alpha_0 + M_A)/K_\theta}{1 - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe/K_\theta} \tag{2.5}$$

上式中的分子表示当不考虑弹性扭转引起的附加气动力时，在由初始攻角α_0所产生的气动力和气动力矩作用下，机翼产生的扭转角，记为：

$$\theta^r = \frac{\frac{\partial C}{\partial \alpha} qSe\alpha_0 + M_A}{K_\theta} \tag{2.6}$$

则（2.5）式可写为：

$$\frac{\theta}{\theta^r} = \frac{1}{1 - qSe\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} / K_\theta} \tag{2.7}$$

这个比值表示的是在考虑气动弹性效应后，机翼弹性扭转变形的放大因子。一般说来，刚心是位于气动中心之后的，即$e > 0$，故$\frac{\theta}{\theta^r} > 1$，而且由（2.7）式还可明显看出，当机翼结构参数确定后，随着速压q（也就是风速）的增加，（2.7）式的分母会减小，从而使比值$\frac{\theta}{\theta^r}$增大，当q达到某一特定值时，（2.7）式的分母成为零，弹性扭角θ就趋于无穷大，机翼成为扭转不稳定的。在气动弹性静力学中称这种情况为机翼的扭转发散，这一个特定的速压称为扭转发散临界速压（简称发散速压，记为q_D），相应的速度称为扭转发散临界速度（简称发散速度，记为V_D）。由（2.7）式分母为零这个扭转发散的临界条件：

$$1 - qSe\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} / K_\theta = 0 \tag{2.8}$$

可解出扭转发散临界速压为：

$$q_D = \frac{K_\theta}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} Se} \tag{2.9}$$

从而得到机翼的扭转发散临界速度:

$$V_D = \sqrt{\frac{2K_\theta}{\rho \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} Se}} \tag{2.10}$$

根据（2.9）式，我们现在可以将（2.7）式改写成：

$$\frac{\theta}{\theta^r} = \frac{1}{1 - q/q_D} \tag{2.11}$$

可见，当速压趋于临界速压时，机翼的弹性扭角将急剧增大。当然，对我们这里研究的二元机翼来讲，在机翼弹性扭转变形达到无穷大之前，扭转弹簧早就破坏了。而且对于真实机翼，弹性扭转角也不可能达到无穷大，机翼结构的弹性恢复力矩与机翼弹性扭角的线性关系以及气动力与机翼攻角之间的线性关系都只是在小攻角条件下才成立，攻角稍大，这种线性关系就不再成立，机翼的弹性扭转也不会达到无穷大。即使如此，在扭转角很大时，也同样将使机翼结构发生破坏，为此，飞机在飞行包线内的飞行速度都必须低于扭转发散速度。应该强调，上述结果不仅代表了二元机翼的扭转发散特性，而且也足以代表真实机翼的扭转发散特性。其实，二元机翼与真实机翼之间的差别，主要不在于扭转发散的基本物理现象和产生的机理，而在于精确计算真实机翼扭转发散速度的理论分析要比上述二元机翼的分析更复杂而已。

三、气动载荷重新分布

从上面的讨论我们知道，当速压小于扭转发散速压时，机翼并不会扭转发散，其扭转角应该为一个确定的有限值，从而机翼上产生的气动升力也是一个确定的有限值，并且升力随着速压的变化而改变。对于二元机翼，表现为升力的变化，对于真实机翼，由于在机翼上分布的局部气动力作用下，机翼上各处的局部弹性扭转角不一样，相应的每个局部气动升力的改变量也就不同，与原来机翼上分布的气动力相比，则气动弹性效应在这里表现为翼面上局部气动升力分布的变化，这种气动弹性现象就是所谓的气动载荷重新分布。虽然对二元机翼来讲，只有一个变化的升力，在分析这个问题时仍然采用了气动载荷重新分布这个术语。

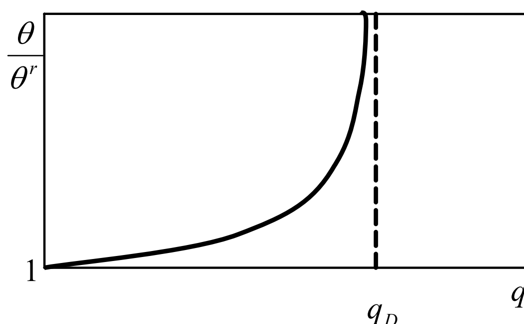


图2-3 机翼弹性扭角随速压变化曲线

当 $q < q_D$ 时，机翼上的升力为：

$$L = C_L qS = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta)qS$$

$$= \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}[\alpha_0 + \frac{(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe\alpha_0 + M_A)/K_\theta}{1 - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe/K_\theta}]qS \tag{2.12}$$

$$= \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \frac{\theta^r}{1 - q/q_D})qS = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qS\alpha_0 + \frac{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qS\theta^r}{1 - q/q_D}$$

$$= L_0 + \frac{L_r}{1 - q/q_D}$$

上式中第一项就是在初始攻角下产生的升力，第二项为考虑机翼弹性变形及气动弹性效应后的附加升力，显然$L > L_0$。对于对称翼型$M_A = 0$，对于一般薄翼也有$M_A \approx 0$，因此，考虑气动弹性效应后的实际升力可以写为：

$$L = C_L qS$$

$$= \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta)qS$$

$$= \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \frac{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe\alpha_0/K_\theta}{1 - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe/K_\theta})qS \tag{2.13}$$

$$= \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qS(\alpha_0 + \frac{\alpha_0 q/q_D}{1 - q/q_D}) = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qS\alpha_0(\frac{1}{1 - q/q_D})$$

$$= \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qS\alpha_0\beta = \beta \cdot L_0$$

其中，$\beta = \frac{1}{1 - q/q_D}$，显然当$q < q_D$时$\beta > 1$，故$\beta$称为考虑气动弹性效应后的升力放大因子。前面已经说过，对于二元机翼，（2.13）式表现为升力的改变，而对于真实机翼，则表现为翼面上局部气动升力分布的变化，既翼面上气动载荷的重新分布。

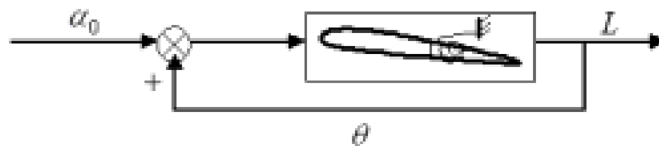


图 2-4 气动弹性反馈系统

四、气动弹性静稳定性分析

由上所述，我们可以将二元机翼的气动弹性静力学问题归结为一个闭环正反馈系统的稳定性问题，其方框图如图2-4所示，初始攻角α_0为二元机翼气动弹性系统的输入，升力L为系统的输出，弹性扭角θ为系统的反馈量。由此可见，气动弹性静力学问题，就是研究具有弹性扭角反馈时升力面的定常气动力分布问题。由（2.13）式可知，考虑气动弹性效应后的升力面系统，实际上对升力起到增益放大的作用。

为了方便后面对三元机翼气动弹性静力学问题的研究，我们再从系统稳定性的角度来研究二元机翼的扭转发散问题。从前面的分析我们知道，使机翼产生扭转发散这一静不稳定现象的原因是由于机翼的弹性扭转变形，而且在求解扭转发散临界速度的过程中也看到，扭转发散速度与初始攻角无关。因此，我们可以从初始攻角为零的机翼在具有一个弹性扭转角θ后力矩平衡的角度，来研究其扭转发散这一静力学稳定性问题。

机翼由于弹性扭转变形θ而产生的弹性恢复力矩为：

$$\Delta M_e = K_\theta \theta \tag{2.14}$$

机翼由于弹性扭转变形θ引起的附加升力对刚心的力矩为：

$$\Delta M_A = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe\theta \tag{2.15}$$

当刚心位于气动中心之后时，这两个力矩的方向相反，从稳定性的角度看，ΔM_A起失稳的作用而ΔM_e起增稳的作用。图2-5画出了这两个力矩随速压的变化曲线。可见，随着速压的增加，气动力矩随之增大，而弹性恢复力矩却与速压无关，是一个固定的值。当$\Delta M_e > \Delta M_A$，即弹性恢复力矩大于气动力矩时，机翼处于静力稳定状态；当$\Delta M_e < \Delta M_A$，即气动力矩大于弹性恢复力矩时，机翼攻角就会不断增大而发生扭转变形失稳；当$\Delta M_e = \Delta M_A$时，机翼任意扭转变形θ引起的攻角改变所导致的气动力矩增量与弹性力矩增量相等，系统始终处于平衡状态，这时候的速压就是扭转发散临界速压q_D。这种静力学稳定性问题从数学上表示为一个静力平衡方程：

$$\begin{gathered} K_\theta \theta = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta qSe \\ (K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe)\theta = 0 \end{gathered} \tag{2.16}$$

这是一个以θ为变量的齐次方程，方程除了有$\theta = 0$的平凡解以外，还可以是任意非零解，条件是θ的系数项为零，即:

$$K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe = 0 \tag{2.17}$$

从而解出：

$$q = \frac{K_\theta}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} Se} \qquad (2.18)$$

这正是扭转发散临界速压q_D的表达式。上述求解过程，从数学上讲属于求解方程（2.17）所示的特征值问题，q_D就是所求的特征值。从后面章节我们会看到，这是求解机翼扭转发散临界速压的一般方法。

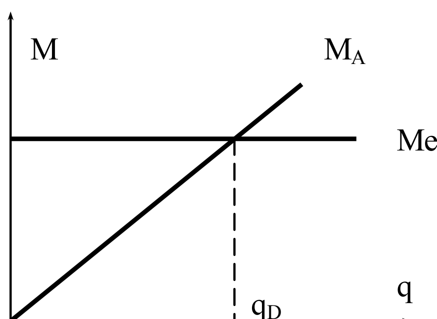


图 2-5 机翼上的力矩随速压变化示意图

五、对扭转发散速度V_D的讨论

由扭转发散速度V_D的公式可以看到，V_D与初始攻角α_0以及绕气动中心的气动力矩M_A无关。而且从（2.5）式还可看到，只有在e为正值时，在一定速压下，分母才能变为零，扭转发散速度公式才有意义。从物理意义上讲，就是机翼在刚心位于气动中心之后才可能发生扭转发散现象。如果e为零或为负，即刚心与气动中心重合或位于气动中心之前，则机翼在所有的速度下都是气动弹性静力扭转稳定的，不可能产生扭转发散现象。这个结论在物理意义上是明显的，而且也具有实际意义。例如在超音速飞行时，机翼的气动中心会后移到翼弦中点附近而使发生扭转发散的危险性大大降低。因此，扭转发散是典型的亚音速现象，而且主要发生于大展弦比长直机翼和前掠机翼，这一点在后面有关章节中还要讨论。

影响扭转发散速度V_D的因素主要有以下几点：

（1）由扭转发散速度公式$V_D = \sqrt{\frac{2K_\theta}{\rho \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} Se}}$知，随着机翼扭转刚度的增加，扭转发散速度$V_D$也增大。显然，如果机翼在扭转自由度上是绝对刚硬的，则任何速度下都不会发生扭转发散失稳。可见，机翼扭转刚度不足是引起扭转发散的主要原因。

（2）机翼设计时，使刚心向前缘靠近，即减小e值，也会使扭转发散速度V_D增加，这

一点在前面已经提到过。

（3）从扭转发散临界速度公式还可以看到，如果大气密度 ρ 减小，扭转发散速度也会增大。我们知道，飞行高度越高，大气密度越低，因此，这一点说明了飞机在低空飞行时，容易出现机翼扭转发散问题，但在高度差不大时，扭转发散速度相差也不太明显，而当高度差很大时，扭转发散速度的差别也是很可观的。

§2.3 二元机翼的操纵面效率与操纵反效问题

前面一节讨论的是飞机在垂直对称面内飞行时，机翼的静气动弹性现象。这一节将讨论在操纵副翼产生偏转，使飞机绕机身纵轴进行滚转时所产生的静气动弹性现象，即所谓的操纵面效率与操纵反效问题。我们仍然先用一个带有副翼的二元机翼来阐明这个问题的物理意义和基本原理。

一、物理现象

如图2-6所示，将带副翼的二元机翼用一个扭转弹簧支持在风洞壁上，使初始攻角为零，然后操纵副翼使其向下偏转 β 角，同时启动风洞，此时，由于副翼的偏转，机翼上的气动力会发生相应的变化。我们知道，副翼向下偏转相当于使机翼弯度增加，从而有升力增量 L_β，且 $L_\beta = \dfrac{\partial C_L}{\partial \beta}\beta q S$，其作用点一般位于气动中心之后，如果把它移到气动中心，则会产生一个附加的对气动中心的力矩 M_β，且 $M_\beta = \dfrac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}\beta q S c$，通常 M_β 是一个使机翼低头的力矩，即 $\dfrac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}$ 为负值。由于机翼是弹性支持的，故该低头力矩会使机翼向减小攻角的方向产生一个弹性扭转变形，即向攻角减小的方向扭转一个 θ 角，这将使机翼产生一个附加的向下的气动力 L_θ，且 $L_\theta = \dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\theta q S$，从而使总的升力增量（通常简称为增升）为 $\Delta L = L_\beta - L_\theta$。这种由于机翼弹性变形而使得偏转副翼所产生的实际增升减小的效应，就是所谓的操纵面效率（副翼效率）问题。

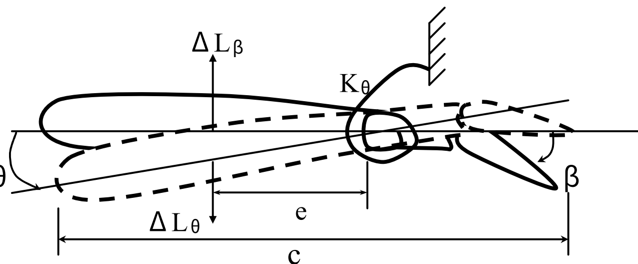


图2-6 带副翼的二元机翼

由于低头力矩与 V^2 成正比，而弹性恢复力矩与 V 无关，故随着风速 V 的增加，会使得机翼的扭转角也增加，从而使实际增升更加减小，副翼的效率会继续降低。当 V 增加到某一

个临界值时，副翼的偏转将不再产生实际增升而完全失去效用，这种现象称为操纵面失效（副翼失效），这时操纵面的操纵效率为零。如果速度V继续增加，则将产生相反的操纵效果，即副翼的向下偏转反而会产生负的增升，从而导致总升力降低，这种现象就是所谓的操纵面反效（副翼反效）。应该注意，当操纵效率为零时，机翼上原有的总升力保持不变，因为此时使副翼偏转β角引起的升力增加等于弹性变形扭转角θ引起的升力减少。对整架飞机来讲，这时操纵副翼偏转不会产生所需要的绕机身纵轴的滚转力矩。

二、副翼操纵反效的临界速度

从上述的物理现象描述和讨论中我们知道，在副翼操纵效率问题中涉及的仅仅是副翼偏转β角后的气动力增量，而与操纵副翼偏转前机翼原有的升力大小无关。故我们在研究副翼操纵效率问题时，可以假定在副翼未偏转前机翼的攻角为零，这对问题的讨论不会有实质上的影响，而且下面所提到的升力系数都是指与副翼偏转后所引起的机翼升力增量相关的部分，不涉及到副翼偏转前，机翼上原有的升力。

副翼偏转β角后，增升的作用点位于气动中心之后。现将其等效为作用于气动中心的升力L_β以及绕气动中心的气动力矩M_β，由于M_β的作用，机翼会产生弹性扭转变形θ，产生一个升力L_θ，从而总的升力增量为：

$$L = L_\beta + L_\theta = C_L qS = (\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\theta + \frac{\partial C_L}{\partial \beta}\beta)qS \tag{2.19}$$

（2.19）式的加号表示机翼的弹性扭转可能是低头扭转也可能是抬头扭转。这时对刚心的总气动力矩为：

$$M = L \cdot e + M_\beta = (\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\theta + \frac{\partial C_L}{\partial \beta}\beta)qSe + \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}\beta qSc \tag{2.20}$$

由于机翼弹性扭转而引起的弹性恢复力矩为：

$$M_e = K_\theta \cdot \theta \tag{2.21}$$

假定机翼在扭转了θ角后达到一个平衡位置，则对刚心的力矩平衡方程为：

$$K_\theta \cdot \theta = (\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\theta + \frac{\partial C_L}{\partial \beta}\beta)qSe + \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}\beta qSc \tag{2.22}$$

因此在副翼偏转β角后，机翼在气动力矩与弹性恢复力矩共同作用下产生的扭转角为：

$$\theta = \frac{(e\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + c\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta})qS}{(K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}qSe)}\beta \tag{2.23}$$

根据升力系数公式，可以求得此时机翼的升力系数，它由两部分组成，一部分为弹性扭转角θ引起，另一部分为副翼偏转角β引起，即：

$$C_L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\theta + \frac{\partial C_L}{\partial \beta}\beta = \frac{(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}qSc + K_\theta\frac{\partial C_L}{\partial \beta})}{K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}qSe}\beta \tag{2.24}$$

由于 $\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} < 0$，故随着风速$V$的增加，上式中分子会越来越小，可以证明，在满足 $e\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + c\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} < 0$的条件下（实际上这个条件也保证了随风速$V$的增加，上式中的分子先于分母为零），随着风速$V$的增加，$C_L$会越来越小，即总增升$L$越来越小，如果在速度未达到扭转发散临界速度之前（即分母为零之前），V增加到使上式分子为零，也即使升力系数$C_L = 0$，则在此速度下，操纵副翼偏转任何角度都不会产生增升，这时，副翼失去作用而处于失效状态，如果V继续增大，就会使升力系数C_L成为负值，操纵副翼偏转实际所产生的升力增量的方向与所需的相反，而出现所谓的操纵反效现象。由此我们知道，副翼反效的临界条件为：

$$\frac{\partial C_L}{\partial \beta}K_\theta + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}qSc = 0 \tag{2.25}$$

从而解出反效临界速压为：

$$q_R = -\frac{\frac{\partial C_L}{\partial \beta}K_\theta}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}Sc} \tag{2.26}$$

反效临界速度为：

$$V_R = \sqrt{-\frac{2\frac{\partial C_L}{\partial \beta}K_\theta}{\rho\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}Sc}} \quad (\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} < 0) \tag{2.27}$$

三、二元机翼的副翼操纵效率

当速度V 低于反效临界速度V_R时，副翼操纵效率的降低程度可以用操纵效率来表示。假定机翼是刚性支持的，显然这时操纵副翼偏转β角后所产生的升力增量仅与β角有关，其升力系数为：

$$C_L^r = \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta \tag{2.28}$$

二元机翼的副翼操纵效率定义为弹性支持机翼的升力系数与刚性支持机翼升力系数之比：

$$\eta = \frac{C_L}{C_L^r} = \frac{\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} qSc + K_\theta \frac{\partial C_L}{\partial \beta}\right)}{\left(K_\theta - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} qSe\right)\frac{\partial C_L}{\partial \beta}} \tag{2.29}$$

$$= \frac{1-q/q_R}{1-q/q_D} = \frac{1-q/q_R}{1-(q_R/q_D)q/q_R}$$

即副翼操纵效率η随气流速压与反效临界速压之比q/q_R而变化，其参变量为反效临界速压与扭转发散临界速压之比q_R/q_D。值得注意的是，对于一个参数确定的机翼，q_R/q_D是一定值。图2-7表示了副翼操纵效率随速压的变化曲线，从操纵效率η的计算公式或图2-7可以看到存在下列三种情况：

（1）若$q_R < q_D$，即反效临界速压低于扭转发散临界速压，则当q趋于q_R时，操纵效率η趋于零。

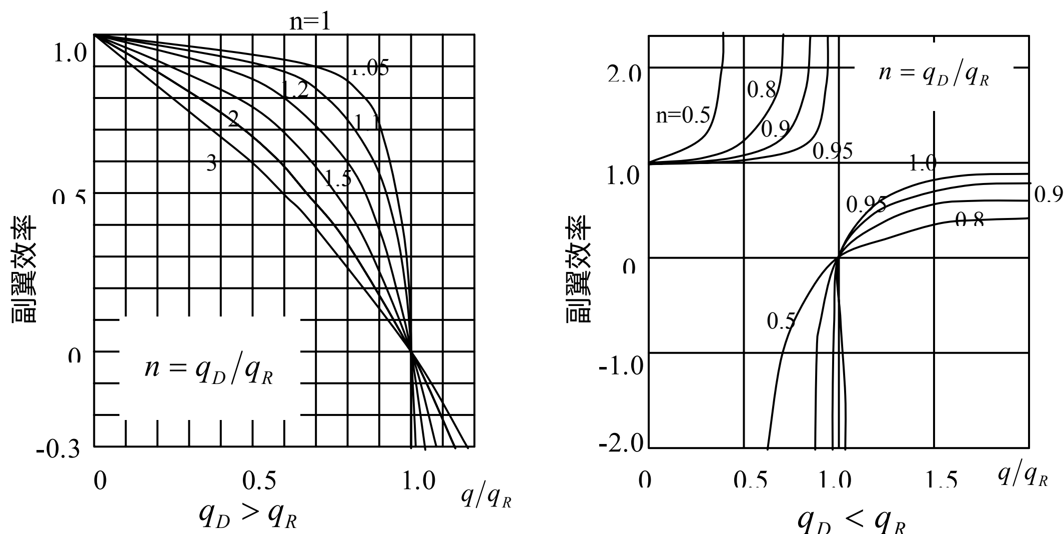


图2-7 副翼操纵效率随速压的变化曲线

（2）若 $q_R > q_D$，即反效临界速压高于扭转发散临界速压，则扭转发散将发生在副翼操纵反效之前，当 q 趋于 $\mathrm{q_D}$ 时，操纵效率 η 趋于无穷。这说明操纵副翼向下偏转很小的偏转角，都将会使机翼产生无穷大的负增升（这时扭转角 θ 趋于负无穷），因此，在这种情况下，q_D 成了实际的反效临界速压。由此可见，操纵反效在 q 等于 q_R 或 q_D 时都会发生，但究竟在哪个速压下发生，要取 q_R 和 q_D 中的较小者，就是说，如果对于一个机翼，其 $q_R > q_D$，则 q_D 实际上既是扭转发散临界速压又是操纵反效临界速压，虽然 q_R 也能计算出来，但却没有实际意义，因为在 q 达到 q_R 之前，机翼已经产生扭转发散而破坏了。

（3）若 $q_R = q_D$，则 $\eta \equiv 1$，故使 $q_R = q_D$ 的设计可以获得弹性支持二元机翼的最佳副翼操纵效率。由 q_R 和 q_D 的计算公式可以得到 $\eta \equiv 1$ 时，机翼参数应满足的关系式：

$$\frac{q_R}{q_D} = 1 = -\frac{e}{c}\frac{\partial C_L/\partial\beta}{\partial C_{m0}/\partial\beta} \tag{2.30}$$

根据机翼理论，二元机翼的气动导数 $\dfrac{\partial C_{m0}}{\partial\beta}$ 与 $\dfrac{\partial C_L}{\partial\beta}$ 都取决于操纵面的相对弦长 $\bar{c}_\beta$（$= c_\beta / c$，c_β 为副翼弦长），对于薄翼，其理论公式为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_L}{\partial\beta} &= 2[2\sqrt{\bar{c}_\beta(1-\bar{c}_\beta)} + \cos^{-1}(1-2\bar{c}_\beta)] \\ \frac{\partial C_{m0}}{\partial\beta} &= -2\sqrt{\bar{c}_\beta(1-\bar{c}_\beta)^3}\end{aligned} \tag{2.31}$$

在设计时可以调节这些参数来得到最佳操纵效率。例如，对于二维不可压缩流场中的机翼，若刚心位于前缘之后40%弦长处（即 $e = 0.15c$），则操纵面相对弦长取为31%，就可得到最佳操纵效率。

对于 $\eta \equiv 1$ 的物理意义，我们可以做出如下的解释：副翼（包括其它操纵面）是用来产生增升的装置，从前面的讨论知，为了避免气动弹性效应引起的操纵效率降低，在操纵副翼等操纵面时，不希望产生附加的对机翼刚心的气动力矩。如果我们操纵副翼（或其它操纵面）只产生纯的增升而不产生对刚心的附加气动力矩，即不会使机翼产生附加的弹性扭转，那么也就不会使所产生的增升发生变化，从产生增升的效果来讲，操纵弹性支持机翼的副翼与操纵刚性支持机翼的副翼是完全一样的，从工程角度上，认为这时的操纵效率是最佳的。现在，我们来看看 $\eta \equiv 1$ 时是否如此呢？当 $\eta \equiv 1$ 时，将（2.28）式改写为：

$$\frac{\partial C_L}{\partial\beta} + \frac{c}{e}\frac{\partial C_{m0}}{\partial\beta} = 0 \tag{2.32}$$

我们注意到，如果机翼是刚性的，当操纵副翼偏转 β 角后，由偏转角 β 直接引起的对机

翼刚心的气动力矩

$$
\begin{aligned}
\overline{M}_{\beta} &= \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \cdot \beta qSe + \frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} \cdot \beta qSc \\
&= (\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + \frac{c}{e}\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta})qS\beta e
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

从而使$\eta \equiv 1$的条件，也正是使$\overline{M}_{\beta} = 0$的条件。从物理意义上讲，就是说在副翼操纵效率$\eta \equiv 1$时，操纵副翼偏转β角不直接引起对刚心的附加气动力矩增量，即操纵副翼偏转产生的增升正好作用于机翼的刚心，这样操纵副翼时就不会受到机翼气动弹性效应的影响，这时弹性机翼的操纵效率与刚性机翼的操纵效率一样，因而可认为它是最佳的。

四、影响操纵反效临界速度与操纵效率的因素

根据前面的讨论，我们可以总结出影响操纵反效临界速度与操纵效率的主要因素，以及提高反效临界速度与操纵效率的措施。通常有以下几个方面：

（1）由操纵反效临界速度公式可知，V_R与刚心到气动中心的距离e无关。因为我们知道，当$V = V_R$时，增升为零，气动力矩是纯力偶产生的。

（2）增加机翼扭转刚度K_{θ}，可使反效临界速度V_R增加，即提高反效临界速度的有效方法之一是增加机翼扭转刚度。

（3）减小机翼弦长c，也可使反效临界速度V_R增加。

（4）操纵效率与刚心到气动中心的距离e有关，因为由（2.23）式可见，随$e\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + c\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta}$的值的符号（正负号）的不同，扭角$\theta$将为正、为负或为零。当$e\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + c\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} < 0$时，$\theta$与$\beta$角符号相反，故考虑气动弹性效应影响后副翼的效率是降低的；当$e\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + c\frac{\partial C_{m0}}{\partial \beta} > 0$时，$\theta$与$\beta$角符号相同，故由于气动弹性效应影响后副翼的效率反而提高了。显然，这时$q_R > q_D$，因为只要副翼向下偏转，不论V增加为多大，弹性扭角θ始终是正的，即此时V_R趋于无穷。提高操纵效率的方法仍然是增加机翼的扭转刚度，适当增加操纵面的弦长也有利于提高操纵效率。此外，从η计算公式看，增加机翼刚心到气动中心的距离e，虽然也可以提高操纵效率，但却使机翼的扭转发散临界速度降低，故工程上通常不采用这种措施。

五、本章小结

本章讨论了二元机翼的两大类气动弹性静力学问题的基本现象、物理意义和相应的计算方法，其目的是弄清它们发生的机理以及避免其发生的措施。具体来说，两类气动弹性静力学问题的产生都存在一个临界速压，设法提高临界速压，是研究气动弹性静力学问题的主要任务。对于扭转发散问题，当机翼刚心位于气动中心之后时，由于气动弹性效应，机翼将存在一个临界速压q_D，当气流速压达到q_D时，机翼成为静力扭转不稳定的。提高扭转发散临界速度的主要途径是增大机翼扭转刚度或减小机翼剖面的气动中心与刚心之间的距离。操纵

反效现象说明，带有操纵面的机翼系统还存在另一个临界速压q_R，当速压达到这个临界速压时，操纵面的操纵功能将完全失效。对同一机翼结构，如果$q_R < q_D$，则速压增大将导致操纵效率降低 ;如果$q_R > q_D$, 则q_D既是扭转发散临界速压又是操纵反效临界速压 ;当$q_R = q_D$时，操纵效率为最佳，始终为1。提高扭转发散临界速压和操纵效率的主要方法仍然是增大扭转刚度。

需要指出的是，虽然本章中的讨论是针对二元机翼进行的，但在实际飞机设计工程中，对真实弹性机翼的静气动弹性特性进行分析时，可以将本章的方法作为第一次近似估算的方法来使用，这时可取距翼尖70%～80%半展长处的机翼剖面的参数作为典型二元机翼的参数，把该剖面的参数代入二元机翼的静气动弹性临界速度计算公式中进行估算，得到机翼临界发散速度和（或）反效临界速度的估算值。如果要得到更精确的计算结果，则要采用后面第三章介绍的计算方法。

第三章　三元机翼的气动弹性静力学问题

§3.1 引言

在上一章的分析和讨论中我们看到，求解二元机翼气动弹性静力学问题的力学途径，实际上是先分别建立机翼作为升力面时其攻角（对三元机翼为分布的局部攻角）与气动力（对三元机翼为分布的气动力）的关系式，以及机翼作为承载结构时其弹性变形（对三元机翼为分布的局部弹性变形）与气动力外载荷（对三元机翼为分布的气动力外载荷）之间的关系式，然后根据作为升力面的机翼的弹性攻角（或分布的局部攻角）就是作为承载结构的机翼的弹性变形（或分布的局部弹性变形），作为升力面的机翼的气动力就是作为承载结构的机翼所受的外载荷这一物理事实，再将上述两个力学关系式联立起来，求解机翼的各种气动弹性静力学问题。

对于三元机翼的气动弹性静力学问题，其求解的力学途径也同样是两方面的：一方面是如何求出弹性机翼在分布的气动载荷作用下产生的弹性变形分布；另一方面是如何由机翼的弹性变形所形成的气动构型（局部攻角分布）求出其所产生的附加气动力。然后将根据这两个方面所得到的力学方程联立起来，就可以求解三元机翼的各种气动弹性静力学问题。

对于第一个方面的问题，根据结构力学中的知识，我们知道有关系：

{外载荷列阵}=[刚度矩阵]×{变形列阵}

需要注意的一点是，在气动弹性静力学问题中，所用到的变形不是各个局部节点的垂直位移，而是机翼在各个局部节点处的顺气流转角（局部攻角）θ，即我们在这里要使用的载荷与变形的关系具有如下所示的数学表达式：

$$\{L\}=[K]\times\{\theta\} \tag{3.1}$$

或者

$$\{\theta\}=[F]\times\{L\} \tag{3.2}$$

这里，$\{\theta\}$为机翼翼面各个局部节点处的顺气流转角列阵，$[K]$为机翼的刚度矩阵，$[F]$为机翼的柔度矩阵，$\{L\}$为机翼翼面各个局部节点处的气动力列阵。至于如何求机翼的刚度（柔度）矩阵，将在后面专门讨论。

对于第二方面的问题，即局部攻角分布与局部气动力分布之间的关系，可以用各种空气动力学理论来建立，如适用于大展弦比直机翼的升力线理论和适合于小展弦比机翼的升力面理论等。下面以升力面理论中的马蹄涡格网法为例，来说明在研究气动弹性静力学问题时，如何应用这些气动力理论来计算机翼上的气动力分布。

§3.2 空气动力影响系数矩阵的计算

马蹄涡格网法又称为“涡格法”，它是升力面理论中比较简单的一种。用马蹄涡格网法计算空气动力影响系数矩阵，首先要计算马蹄涡对任意一点产生的诱导速度。

一、马蹄涡对任意一点的诱导速度

顾名思义，马蹄涡是由附着在翼面上的一段附着涡，以及由其个两端点顺气流方向拖延至无穷远处的两个自由涡组成，如图3-1所示，马蹄涡也由此而得名。为简单起见，这里只讨论马蹄涡与任意一点共面的情况。

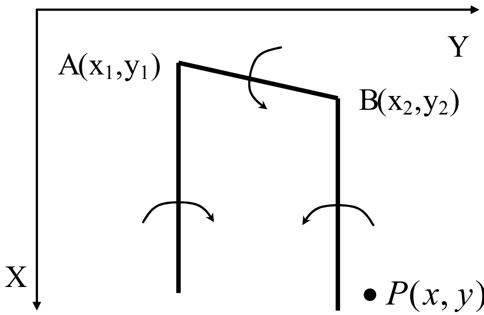


图 3-1 马蹄涡示意图

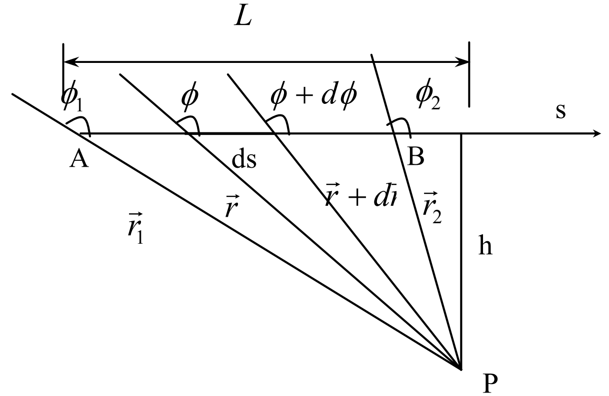


图 3-2 涡段对一点的诱导速度

根据毕奥-萨瓦定律，任意一个涡强为Γ的微涡线ds在任意一点P处产生的诱导速度矢量为：

$$d\vec{w}=\frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{\vec{r}\times d\vec{s}}{r^3} \tag{3.3}$$

其大小为：

$$dw=\frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{\sin\phi ds}{r^2} \tag{3.4}$$

如图3-2所示，$\vec{r}$为P点到$d\vec{s}$的矢径，$\vec{r}_0$为附着涡起点A到终点B的矢径，$\vec{r}_1$为P点到A点的矢径，$\vec{r}_2$为P点到B点的矢径。ϕ为$\vec{r}$与$d\vec{s}$的夹角，$d\vec{w}$的方向按右手法则确定，它垂直于$d\vec{s}$和P点所决定的平面，即与Z轴同向。由图3-2可得：

$$(L-s)\cdot\tan(\pi-\phi)=h \tag{3.5}$$

两边微分可得

$$ds=(L-s)\frac{\sec^2\phi}{\tan\phi}\cdot d\phi=\frac{(L-s)d\phi}{\sin\phi\cos\phi} \tag{3.6}$$

将$\sin\phi=\dfrac{h}{r}$，$\cos\phi=\dfrac{L-s}{r}$代入上式，得到

$$\frac{ds}{r^2}=\frac{d\phi}{h} \tag{3.7}$$

因此，涡强为Γ的直线涡段$\overrightarrow{AB}$在P点产生的诱导速度的大小为：

$$\begin{aligned} w &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\overrightarrow{AB}}\frac{\sin\phi}{r^2}ds \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\sin\phi d\phi \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\phi_1-\cos\phi_2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

将$h=\dfrac{|\vec{r}_1\times\vec{r}_0|}{r_0}$，$\cos\phi_1=\dfrac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}_1}{r_0r_1}$，$\cos\phi_2=\dfrac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}_2}{r_0r_2}$代入上式，$\vec{w}$的矢量形式为：

$$\begin{aligned} \vec{w}(x,y) &= \frac{\Gamma}{4\pi h}\frac{r_0h}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_0|}\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_0}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_0|}\left(\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}_1}{r_0r_1}-\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}_2}{r_0r_2}\right) \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_0}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_0|^2}\left(\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}_1}{r_1}-\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}_2}{r_2}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

根据P点及A、B两点的直角坐标$P(x,y),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$与矢径$\vec{r}_0,\vec{r}_1,\vec{r}_2$之间的关系式：

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+0\cdot\vec{k} \\ \vec{r}_1 &= (x_1-x)\vec{i}+(y_1-y)\vec{j}+0\cdot\vec{k} \\ \vec{r}_2 &= (x_2-x)\vec{i}+(y_2-y)\vec{j}+0\cdot\vec{k} \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$分别为直角坐标系中X，Y，Z 轴的单位矢量。可以得到：

$$\begin{aligned} \vec{r}_1\times\vec{r}_0 &= [(x_2-x_1)(y-y_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)]\vec{k} \\ |\vec{r}_1\times\vec{r}_0|^2 &= [(x_2-x_1)(y-y_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)]^2 \\ \vec{r}_0\cdot\vec{r}_1 &= -[(x_2-x_1)(x-x_1)+(y-y_1)(y_2-y_1)] \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2 = -[(x_2 - x_1)(x - x_2) + (y - y_2)(y_2 - y_1)]$$

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

由此可得附着涡段 $\vec{AB}$ 对 P 点的诱导速度为：

$$\vec{w}_{AB}(x, y) = \frac{E}{4\pi}[(x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)]\Gamma\ \vec{k} \tag{3.12}$$

其中

$$E = \frac{B - C}{D}$$

$$B = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{r_1} = -\frac{(x_2 - x_1)(x - x_1) + (y_2 - y_1)(y - y_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}$$

$$C = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{r_2} = -\frac{(x_2 - x_1)(x - x_2) + (y_2 - y_1)(y - y_2)}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}} \tag{3.13}$$

$$D = \left|\vec{r}_0 \times \vec{r}_1\right|^2 = [(x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)]^2$$

上式中，下标1，2分别代表附着涡段的始点和终点，涡矢量由始点指向终点，从而可由（3.12）式、（3.13）式可以推出左、右自由涡对 P 点的诱导速度。注意到左自由涡的始点坐标为 (∞, y_1)，终点坐标为 (x_1, y_1)；右自由涡的始点坐标为 (x_2, y_2)，终点坐标为 (∞, y_2)，则直接套用附着涡段对 P 点的诱导速度公式，得到：

$$\begin{aligned}\vec{w}_L &= \lim_{u \to \infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(x_1 - u)(y - y_1)}{(x_1 - u)^2 (y - y_1)^2} \left[\frac{(x_1 - u)(x - u)}{\sqrt{(x - u)^2 + (y - y_1)^2}} - \frac{(x_1 - u)(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}\right]\vec{k} \\ &= -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{y - y_1}\left[1 + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}\right]\vec{k}\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\vec{w}_R &= \lim_{u \to \infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(u - x_2)(y - y_2)}{(u - x_2)^2 (y - y_2)^2} \left[\frac{(u - x_2)(x - x_2)}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}} - \frac{(u - x_2)(x - u)}{\sqrt{(x - u)^2 + (y - y_2)^2}}\right]\vec{k} \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{y - y_2}\left[1 + \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}}\right]\vec{k}\end{aligned} \tag{3.15}$$

整个马蹄涡对点 $P(x, y)$ 的诱导速度为：

$$\vec{w}(x,y)=\vec{w}_{AB}(x,y)+\vec{w}_L+\vec{w}_R \tag{3.16}$$

诱导速度的大小为：

$$\begin{aligned} w(x,y)=\{&\frac{E}{4\pi}[(x_2-x_1)(y-y_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)] \\ &-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{y-y_1}[1+\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}] \\ &+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{y-y_2}[1+\frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}}]\}\varGamma \end{aligned} \tag{3.17}$$

在上面的推导中，已经考虑了诱导速度的方向，即规定诱导速度正方向与Z 轴正方向相同，所以在进行数值计算时，如果算出的$w(x,y)$为正，则其方向与Z轴方向相同，$w(x,y)$为负，则其方向与z轴方向相反。

二、空气动力影响系数矩阵

在求得了马蹄涡对一点的诱导速度计算公式以后，就可以计算三元机翼的空气动力影响系数矩阵。首先要将翼面按一定的规则划分为有限的网格。如图3-3所示，根据薄翼理论，可将机翼压到XOY平面内来计算局部攻角产生的气动力。将机翼沿展向划分成若干平行于X轴的列，然后再沿弦向划分成若干行，这样，就把机翼分成了有限个网格。现在，在每个网格上布置一个马蹄涡，根据薄翼理论，应使每个网格上马蹄涡的附着涡线与该网格的四分之一弦线重合，两条自由涡从四分之一弦线的两端点顺气流方向（平行于X轴）伸向下游无穷远处，每个网格上的马蹄涡强度为常量，并取每个网格的四分之三弦线中点为下洗控制点，计算实践表明，这样处理，可以使机翼后缘的库塔（流动无分离）条件自动得到满足。

在进行网格划分时，可以是均匀划分，也可以是不均匀划分，一般，在气动载荷变化比较剧烈的地方划分密一些，但是要注意，当机翼后缘为折线或有操纵面时，折点、操纵面两侧及操纵面铰链线都必须正好在网格边界上。此外，同一列上的网格左右边界必须重合，以避免下洗控制点与自由涡线重合而不能正确模拟诱导出的平均速度。

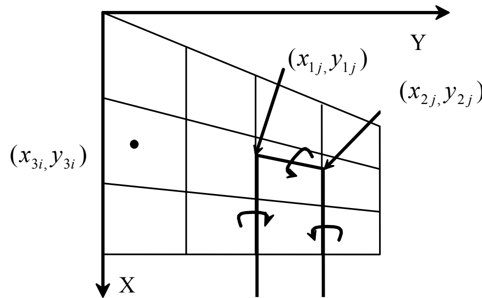


图 3-3 机翼上的格网划分

如图 3-3 所示，假定机翼上共划分了 N 个网格，在第 j 个网格上马蹄涡的涡强为 Γ_j ，其附着涡的始点及终点坐标分别记为 $(x_{1j}, y_{1j}),(x_{2j}, y_{2j})$ ，第 i 个网格的控制点坐标为 (x_{3i}, y_{3i}) ，则由马蹄涡诱导速度的计算公式可以直接写出第 j 个网格上涡强为 Γ_{j} 的马蹄涡对第 i 个控制点的诱导速度为：

$$w_{ij} = (k_w)_{ij}\Gamma_j \tag{3.18}$$

其中

$$\begin{aligned}(k_w)_{ij} &= k_w(x_{3i}, y_{3i}, x_{1j}, y_{1j}, x_{2j}, y_{2j}) \\ &= \frac{\widetilde{E}}{4\pi}[(y_{3i}-y_{1j})(x_{2j}-x_{1j})-(x_{3i}-x_{1j})(y_{2j}-y_{1j})] \\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{y_{3i}-y_{1j}}[1+\frac{x_{3i}-x_{1j}}{\sqrt{(x_{3i}-x_{1j})^2+(y_{3i}-y_{1j})^2}}] \\ &\quad +\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{y_{3i}-y_{2j}}[1+\frac{x_{3i}-x_{2j}}{\sqrt{(x_{3i}-x_{2j})^2+(y_{3i}-y_{2j})^2}}]\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\widetilde{E} = \frac{\widetilde{B}-\widetilde{C}}{\widetilde{D}} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{B} &= -\frac{(x_{2j}-x_{1j})(x_{3i}-x_{1j})+(y_{2j}-y_{1j})(y_{3i}-y_{1j})}{\sqrt{(x_{3i}-x_{1j})^2+(y_{3i}-y_{1j})^2}} \\ \widetilde{C} &= -\frac{(x_{2j}-x_{1j})(x_{3i}-x_{2j})+(y_{2j}-y_{1j})(y_{3i}-y_{2j})}{\sqrt{(x_{3i}-x_{2j})^2+(y_{3i}-y_{2j})^2}} \\ \widetilde{D} &= [(y_{2j}-y_{1j})(x_{3i}-x_{1j})-(x_{2j}-x_{1j})(y_{3i}-y_{1j})]^2\end{aligned} \tag{3.21}$$

全部网格上的马蹄涡对第 i 个控制点的总诱导速度为：

$$w_i = \sum_{j=1}^{N}(k_w)_{ij}\Gamma_j \tag{3.22}$$

任意一段涡强为 Γ_j 的涡线 ds 产生的升力为：

$$\left|\rho\vec{V}_\infty \times \Gamma_j d\vec{s}\right| = \rho V_\infty \Gamma_j ds \sin(\vec{V}_\infty, d\vec{s}) \tag{3.23}$$

则由图3-4所示，第 j 个网格上的马蹄涡产生的升力为:

$$L_j = \rho V_\infty \Gamma_j ds_j \cos\phi_j \\ = \rho V_\infty \Gamma_j \Delta y_j \tag{3.24}$$

如果按升力系数的形式写出马蹄涡所产生的升力，则：

$$L_j = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 C_{Lj} b_j \Delta y_j \tag{3.25}$$

从而可由（3.24）、（3.25）两式导出升力系数与涡强之间的关系为:

$$\Gamma_j = \frac{1}{2} V_\infty b_j C_{Lj} \tag{3.26}$$

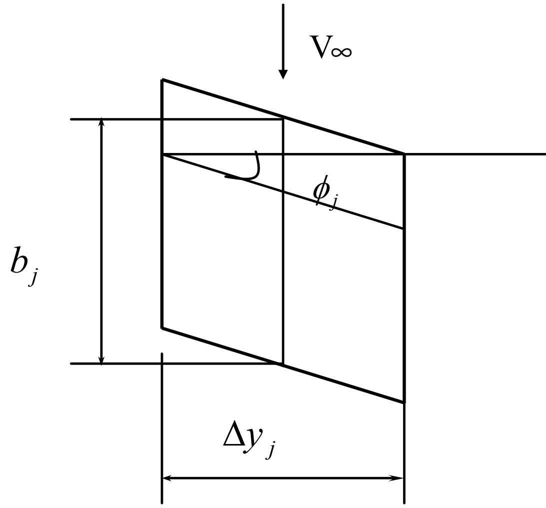


图 3-4 涡格的升力

代入（3.22）式可得：

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}(k_w)_{ij} b_j C_{Lj} = \frac{w_i}{V_\infty} \tag{3.27}$$

根据线性化薄翼绕流的边界条件：

$$\frac{w_i}{V_\infty} = (\frac{\partial z}{\partial x})_i = -\alpha_i \tag{3.28}$$

可得:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}(k_w)_{ij} b_j C_{Lj} = (\frac{\partial z}{\partial x})_i = -\alpha_i \qquad (i = 1,2,3\ldots N) \tag{3.29}$$

因为机翼上的气动载荷总可以处理成对称和反对称载荷的迭加，所以在实际计算时，可

以只取一边的机翼来划分网格，这时另一边机翼上处于对称位置上的涡格，根据对称性，其涡强为$\Gamma_j' = \Gamma_j$，它对控制点i点的诱导速度等于Γ_j对i'点（i点在另一边机翼上的对称点）的诱导速度，即$w_{i'j}$，如图3-5所示。由此，可将（3.29）式写成矩阵形式：

$$[A]\{bC_L\} = \{\alpha\} \tag{3.30}$$

其中：

$$A_{ij} = -\frac{1}{2}[(k_w)_{ij} \pm (k_w)_{i'j}] \tag{3.31}$$

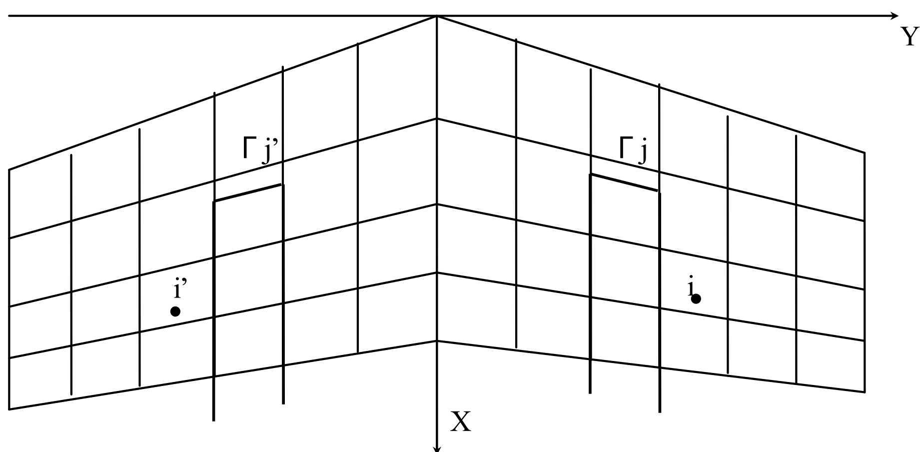


图 3-5 机翼的涡格划分

当左右机翼剖面的弯度对称时，如飞机在平飞状态下，上式中取加号，通常记为$[A^S]$；当左右机翼剖面弯度反对称时，如飞机在滚转机动的飞行状态下，上式中取减号，通常记为$[A^a]$，这样得到的矩阵$[A^S]$或$[A^a]$就是我们在求解飞机气动弹性静力学问题中要用到的定常空气动力影响系数矩阵。

马蹄涡格网法既适用于大展弦比机翼，也适用于小展弦比机翼，对于机翼前后缘有转折或有操纵面时，处理起来比较方便。用这种方法计算定常气动力，公式比较简单，易于编程，但当格网数划分较多时，计算时间相对较长。在三元机翼气动弹性静力学问题的计算中，通常使用马蹄涡格网法来计算空气动力影响系数矩阵。

§3.3 机翼柔度影响系数矩阵的计算

实际的工程颤振分析中，都是用有限元方法，编制程序来计算机翼的柔度影响系数矩阵，本节主要介绍机翼柔度影响系数的概念以及如何确定一些简单机翼结构的柔度影响系数，以及当用马蹄涡格网法计算空气动力影响系数矩阵时，相应的柔度影响系数矩阵计算中需要注

意的问题，这样既有助于加深对其物理意义的理解，又可在作简化计算时，直接计算出柔度影响系数。

机翼是一个复杂的弹性体，即使对大展弦比直机翼这样最简单的情况，要精确计算其柔度影响系数，一般也较困难，因此首先要把真实机翼的复杂结构在一定条件下简化成为一个可以代表原结构主要力学特性的相应的力学模型。

首先，机翼在其自身平面内的抗弯刚度比起与机翼平面相垂直的平面内的抗弯刚度要大得多，机翼在其自身平面内的变形很小，而且这种变形几乎对气动载荷没有什么影响。因此通常假设机翼在自身平面内是绝对刚硬的。对于大展弦比机翼，其弦向刚度比展向刚度要大得多，因而其弦向变形比展向变形要小得多，所以对大展弦比机翼，可以假设其弦向剖面也是绝对刚硬的，即采用弦向剖面不变形的假设。由结构力学知识，我们知道，对于薄壳结构，其剖面都有一称为弯心或刚心的点，当剪力通过该点时，剖面间不产生相对扭转，如果壳体为棱柱形壳体，则连接各剖面的弯心线为一直线（也称为弹性轴），对于真实机翼，虽然不是棱柱形壳体，各剖面也不尽相同，但工程实践表明，对于大展弦比机翼，只要没有大开口，或结构形式沿展向没有很大的变化，则其弹性轴基本上还是一条直线，这种机翼的弹性特性可以近似用其弹性轴的弹性特性来表示，当然该弹性轴沿展向的弯曲刚度、剪切刚度及扭转刚度与原机翼应该是一致的。

对于大展弦比直机翼，这样的弹性轴基本与机身对称平面相垂直，那么在弹性轴上作用一个扭矩，将只使机翼产生扭转变形；在弹性轴上作用一个力，只会使机翼产生弯曲变形，即弯扭变形不产生耦合，而且对于直机翼，弯曲变形不引起攻角的变化，它所产生的气动载荷很小，在进行静气动弹性分析时，可以不予考虑。

综上所述，一个大展弦比直机翼的弹性特性，可以近似用一个垂直于机身对称平面的，如上所述的弹性轴的弹性特性来表示，这在后面章节的研究中还要用到，在气动弹性静力学问题中研究大展弦比直机翼的静气弹问题时，只需研究其扭转特性即可。

一、大展弦比直机翼柔度影响系数

大展弦比直机翼如图3-6所示，其根部固持，为方便起见，设其弹性轴与Y轴重合，根据弦向不变形假设，作用在每一剖面上的力都可以等效为作用在弹性轴上的力和对弹性轴的力矩。又因弯曲变形对定常气动力无甚影响，所以我们只需研究扭转柔度影响系数$f^{\theta\theta}(y,\eta)$即可，它表示在弹性轴上η处作用一单位扭矩时，在y剖面处产生的扭角（扭矩与扭角均以抬头为正），由材料力学知识，有：

$$f^{\theta\theta}(y,\eta)=\int_0^y \frac{d\lambda}{GJ(\lambda)} \quad (y\le\eta) \tag{3.32a}$$

$$f^{\theta\theta}(y,\eta)=\int_0^\eta \frac{d\lambda}{GJ(\lambda)} \quad (y \ge \eta) \tag{3.32b}$$

其中，$GJ(\lambda)$ 为弹性轴的抗扭刚度。

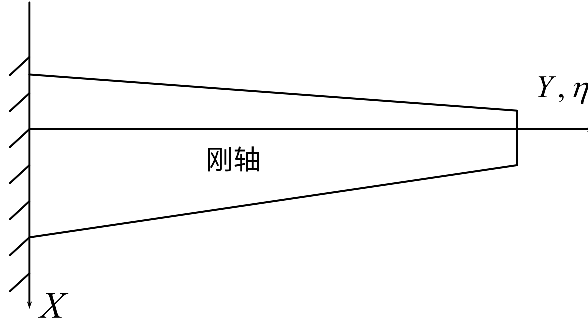


图 3-6 长直机翼

如前所述，对弹性轴而言，$f^{z\theta}(y,\eta)=f^{\theta z}(y,\eta)=0$。$f^{\theta z}(y,\eta)$ 表示在弹性轴上 η 处作用一单位力时，在y剖面处产生的扭角（力以向上为正，扭角以抬头为正）。

当用马蹄涡格网法计算空气动力时，弦向往往也划分为若干格网，这时各网格的气动力并不集中作用在弹性轴上，为此需要引出另外一个柔度影响系数 $f^{\theta z}(x,y,\xi,\eta)$，它表示在机翼上 (ξ,η) 点处作用单位力后，在 (x,y) 处产生的顺气流方向的扭转变形，即：

$$\begin{aligned} f^{\theta z}(x,y,\xi,\eta) &= -\xi\int_0^y \frac{d\lambda}{GJ(\lambda)} \quad (y \le \eta) \\ &= -\xi\int_0^\eta \frac{d\lambda}{GJ(\lambda)} \quad (y \ge \eta) \end{aligned} \tag{3.33}$$

后面将看到，采用 $f^{\theta z}(x,y,\xi,\eta)$ 可以将各种机翼的弹性平衡方程表示为统一的形式。

此外，采用马蹄涡格网法计算空气动力时，对每一涡格，其空气动力作用在其四分之一弦线中点（下洗点）处，而绕流边界条件要求在其四分之三弦线中点（控制点）处得到满足，所以，在（3.33）式中，即使对同一涡格，(ξ,η) 点与 (x,y) 点也不是同一点。

二、大展弦比后掠机翼柔度影响系数

对于大展弦比后掠机翼，仍然假定其在机翼平面内绝对刚硬及弦向剖面绝对刚硬，但它与直机翼相比，在根部多了一个三角形盒段。在大展弦比情况下，翼根三角形盒段对变形影响可以忽略，从而长后掠机翼可以视为斜着固定在机身上的长直机翼，其弹性轴与有效根部垂直，如图3-7所示，即其弹性轴不再与机身对称面垂直而是与之夹了一个后掠角（不一定与前缘后掠角相等）。

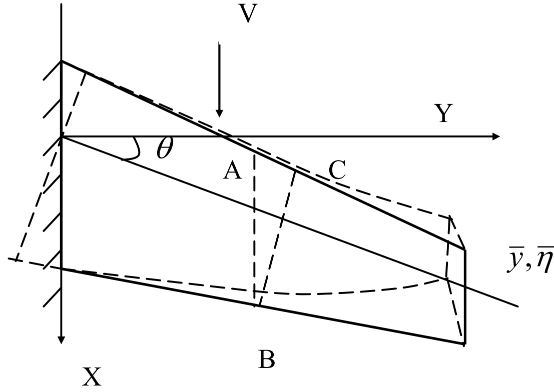


图 3-7 后掠长直机翼

在后掠机翼作弯曲变形时，与弹性轴正交的剖面基本上向上平行移动，在同一正交剖面上的前后两点B、C的垂直位移基本相同（图3-8），这样，在同一顺流剖面上，前缘A点的位移就比后缘B点小，从而使顺流剖面产生低头扭转，这也就是说，后掠机翼向上弯曲时，顺流剖面攻角会随之减小，从而使升力减小，这对于扭转发散品质来说，有改善作用， 即后掠机翼的扭转发散品质比长直机翼要好。同时也说明，对于后掠机翼，其弯曲变形与扭转变形是耦合，在计算柔度影响系数时，我们必须同时考虑弯曲及扭转两方面的影响。

计算空气动力影响系数时，使用的是顺流剖面的扭转变形，因此，我们可以先求解出与弹性轴垂直的剖面的弯曲与扭转，然后再转化到顺流方向，如果引入前文所述的柔度影响系数$f^{\theta z}(x,y,\xi,\eta)$，则：

$$f^{\theta z}(x,y,\xi,\eta)=f^{\theta z}(y,\eta)-\xi f^{\theta\theta}(y,\eta) \tag{3.34}$$

这里柔度影响系数$f^{\theta\theta}(y,\eta)$表示在弹性轴上η剖面处作用单位扭矩（扭矩矢量垂直于气流方向），在弹性轴上y处顺气流剖面所产生的扭转变形，根据材料力学知识可得：

$$f^{\theta\theta}(y,\eta)=\int_0^{y/\cos\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\overline{GJ}}+\frac{\sin^2\theta}{\overline{EI}}\right)d\bar{\lambda}\quad(y\le\eta)$$
$$f^{\theta\theta}(y,\eta)=\int_0^{\eta/\cos\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\overline{GJ}}+\frac{\sin^2\theta}{\overline{EI}}\right)d\bar{\lambda}\quad(y\ge\eta) \tag{3.35}$$

而柔度影响系数$f^{\theta z}(y,\eta)$表示在弹性轴上η剖面处作用单位力，在y处顺气流剖面引起的扭角。

$$f^{\theta z}(y,\eta)=-\sin\theta\int_0^{y/\cos\theta}\left(\frac{\eta/\cos\theta-\bar{\lambda}}{\overline{EI}}\right)d\bar{\lambda}\quad(y\le\eta)\quad(y\le\eta)$$
$$f^{\theta z}(y,\eta)=-\sin\theta\int_0^{\eta/\cos\theta}\left(\frac{\eta/\cos\theta-\bar{\lambda}}{\overline{EI}}\right)d\bar{\lambda}\quad(y\ge\eta)\quad(y\ge\eta) \tag{3.36}$$

其中，$\overline{EI}$ 、$\overline{GJ}$ 是垂直于弹性轴剖面上的抗弯刚度及抗扭刚度。

三、小展弦比机翼的柔度影响系数

对于小展弦比机翼，其弦向变形与展向变形是同样重要的，因此不能再用等效为弹性梁的方法来处理，而需要用较复杂的有限元方法来计算，小展弦比机翼的柔度影响系数表示为 $f^{\theta z}(x,y,\xi,\eta)$，它表示在机翼上 (ξ,η) 处作用单位力而在 (x,y) 处所引起的顺气流方向的扭转角。求 $f^{\theta z}(x,y,\xi,\eta)$ 的具体方法可参考有关的文献资料，这里不再详细讨论。

§3.4 三元机翼的气动载荷重新分布与扭转发散

在第一节中，我们已推导出了使用马蹄涡格网法计算空气动力影响系数时，局部攻角、升力系数以及气动力影响系数三者之间的关系：

$$[A]\{bC_L\}=\{\alpha\} \tag{3.37}$$

如图3-5所示，对第 i 个涡格，b_j 为网格处小块翼面的中弦长度，Δy_j 为网格展向宽度，$b_j\Delta y_j$ 就是该小块翼面的面积。按照局部升力系数的定义，第 j 个网格处的局部升力为：

$$L_j=C_{Lj}q(b_j\Delta y_j)=b_jC_{Lj}(q\Delta y_j) \tag{3.38}$$

为下面讨论方便，在不影响问题实质的前提下，我们假定翼面网格划分时，展向是均匀划分的，即 Δy_j 为常数，则局部升力矢量为：

$$\{L\}=\{bC_L\}q\Delta y \tag{3.39}$$

记 $\overline{q}=q\Delta y$，则上式可写为：

$$\{L\}=\overline{q}\{bC_L\} \tag{3.40}$$

从而，由马蹄涡格网法基本公式（3.30），可得到气动力与气动力影响系数之间的关系式为：

$$[A]\{L\}=\overline{q}\{\alpha\} \tag{3.41}$$

根据结构力学的知识可知，机翼弹性扭转变形与气动力（外载荷）之间的关系为：

$$\{\theta\}=[F]\{L\} \tag{3.42}$$

其中，$[F]$ 中的各元素就是前一节中所述的 $f^{\theta z}(x,y,\xi,\eta)$，（3.42）式也可以写成：

$$[K]\{\theta\}=\{L\} \tag{3.43}$$

其中，$[K]=[F]^{-1}$ 为机翼的刚度矩阵。

将（3.41）与（3.42）式或（3.43）式联立，就可以求解弹性机翼的各类静气动弹性问题。

一、三元机翼的载荷重新分布

对于弹性机翼，考虑气动弹性效应后，其攻角分布为：

$$\{\alpha\}=\{\alpha_0\}+\{\theta\} \tag{3.44}$$

其中，$\{\alpha_0\}$ 为原始的局部攻角分布。

将（3.42）式中的弹性扭角 $\{\theta\}$ 表达式代入（3.41）式中，可得：

$$[A]\{L\}-\bar{q}[F]\{L\}=\bar{q}\{\alpha_0\} \tag{3.45}$$

从而得到弹性机翼的气动力分布为：

$$\begin{aligned}\{L\}&=([A]-\bar{q}[F])^{-1}\bar{q}\{\alpha_0\}\\&=\bar{q}([A]-\bar{q}[F])^{-1}\{\alpha_0\}\end{aligned} \tag{3.46}$$

如果由（3.43）式出发，则用刚度矩阵[K] 前乘（3.41）式的两边后，可求解出弹性机翼气动载荷分布的另一种表达式：

$$\begin{aligned}\{L\}&=([K][A]-\bar{q}[I])^{-1}\bar{q}[K]\{\alpha_0\}\\&=\bar{q}([K][A]-\bar{q}[I])^{-1}[K]\{\alpha_0\}\end{aligned} \tag{3.47}$$

我们也可以先求出机翼的弹性扭转变形 $\{\theta\}$，再得到弹性机翼的气动载荷，即将式（3.43）式代入式（3.41），得：

$$\begin{aligned}&[A][K]\{\theta\}=\bar{q}(\{\theta\}+\{\alpha_0\})\\&\{\theta\}=([A][K]-\bar{q}[I])^{-1}\bar{q}\{\alpha_0\}\end{aligned} \tag{3.48}$$

然后得到：

$$\{L\}=[K]\{\theta\}=\bar{q}[K]([A][K]-\bar{q}[I])^{-1}\{\alpha_0\} \tag{3.49}$$

可以证明，上述弹性机翼载荷分布的三种表达式的结果是一致的。求出的 $\{L\}$ 就是考虑机翼弹性变形以后，机翼各格网上实际的局部升力组成的气动力分布列阵。

二、三元机翼的扭转发散临界速度

在分析二元机翼的扭转发散问题时，就已经看到，原始局部攻角 $\{\alpha_0\}$ 可以不予考虑，即可直接从 $\{\alpha_0\}=\{0\}$ 的情况出发，来求扭转发散临界速度，这时扭转发散问题的基本方程为：

$$\begin{cases}[A]\{L\}=\bar{q}\{\theta\}\\\{\theta\}=[F]\{L\}\end{cases} \tag{3.50}$$

上面两个齐次方程中只有两个未知量 $\{L\},\{\theta\}$，从而构成一个特征问题，$\bar{q}$ 就是待定的特征值。将 $\{L\}=\bar{q}[A]^{-1}\{\theta\}$ 代入第二个方程有：

$$\frac{1}{\overline{q}}\{\theta\}=[F][A]^{-1}\{\theta\} \tag{3.51}$$

它是一个标准特征值问题，用迭代法可以求出最小的$\overline{q}_D$，从而可以得到临界速压q_D及临界速度V_D。

对于一般的情况，机翼刚度矩阵是已知的，同样，可将扭转发散临界速度的求解归结为下面的标准特征值问题：

$$[A][K]\{\theta\}=\overline{q}\{\theta\} \tag{3.52}$$

用逆迭代法可以求出最小的特征值$\overline{q}_D$，然后得到临界速压q_D及临界速度V_D。

顺便指出，如果在用马蹄涡格网法计算$[A]$阵时，机翼展向分块不采用等距分块，即Δy_i不是常数，那么有：

$$\{L\}=q\cdot diag[(\Delta y)]\{bC_L\} \tag{3.53}$$

则静气动弹性问题的上述基本方程式应写成：

$$\begin{cases} [A]\{bC_L\}=\{\alpha\} \\ \{\theta\}=q[F]\cdot diag[(\Delta y)]\{bC_L\} \end{cases} \tag{3.54}$$

其余的求解过程完全相同。但为方便起见，在讨论下面的副翼效率问题时，仍采用机翼展向等距划分的方法。

§3.5　三元机翼的副翼效率与操纵反效

一、副翼反效临界速度

对整架飞机来说，操纵副翼偏转β角应引起飞机绕机身轴（纵轴）的滚转，但是由于弹性机翼的气动弹性效应，会使副翼产生操纵效率降低甚至出现副翼操纵反效的现象，即操纵副翼偏转时达不到预想的滚转力矩或不产生预期的滚转甚至使飞机向相反的方向滚转，显然在这类问题中，对飞机机身轴（纵轴）对称分布的气动力是不起作用的，只需考虑反对称分布的气动力，即在计算时，气动力与攻角关系式中的气动力影响系数阵$[A]$应按反对称载荷情况处理，如果用马蹄涡格网法计算，则$[A]$中元素按式（3.31）计算时，应取减号，即求$[A^a]$。

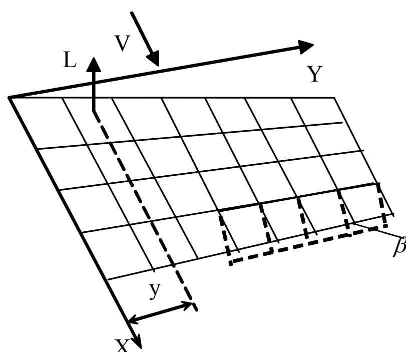


图 3-8 带副翼的机翼

副翼反效问题，实际上是研究弹性机翼在操纵副翼偏转 β 角后的升力增量问题，因此，机翼的原始攻角分布可以不予考虑，即直接考虑 $\{\alpha_0\} = \{0\}$ 的情况。

副翼偏转后的机翼如图 3-8 所示，假定在计算翼面空气动力时，格网划分采用如下规律，即副翼的前、后缘线和左右边缘线都划分为格网线，则不难理解，副翼偏转 β 角后，可以认为整个机翼是处于一种特殊的原始攻角分布状态。假定格网的编号从副翼上的格网开始，整个机翼划分为 N 个格网。其中副翼划分为 N_a 个格网，则此时可以认为机翼具有一个等效的原始攻角分布：

$$\{\widetilde{\alpha}_0\} = \{\underbrace{\beta, \beta, \cdots \beta}_{N_a}, \underbrace{0, 0, \cdots 0}_{N-N_a}\}^T \tag{3.55}$$

或简写成：

$$\{\widetilde{\alpha}_0\} = \beta\{d\} \tag{3.56}$$

这里

$$\{d\} = \{\underbrace{1, 1, \cdots 1}_{N_a} \ \underbrace{0, 0, \cdots 0}_{N-N_a}\}^T \tag{3.57}$$

由此，弹性机翼在副翼偏转 β 角后，所产生的升力分布，可以直接引用前节中的公式，仅需用 $\{\widetilde{\alpha}_0\}$ 代替 $\{\alpha_0\}$ 即可，即：

$$\{L\} = \beta\,\overline{q}([K][A^a] - \overline{q}[I])^{-1}[K]\{d\} \tag{3.58}$$

副翼效率可以用副翼偏转 β 角后，产生的绕机身轴（纵轴）的滚转力矩 M_x 来衡量：

$$M_x = \{y\}^T\{L\} \tag{3.59}$$

如果当副翼偏转 β 角后，实际产生的滚转力矩 $M_x = 0$，则机翼处于副翼反效的临界状态。从而，对于副翼反效问题，其基本方程为：

$$
\begin{aligned}
&[A^a]\{L\} = \overline{q}(\{d\}\beta + \{\theta\}) \\
&[K]\{\theta\} = \{L\} \\
&\{y\}^T\{L\} = 0
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

上述方程中，β，$\{L\}$，$\{\theta\}$都是未知量，从而构成求解齐次方程非零解的问题，也是一个特征值问题，$\overline{q}$就是待求特征值。

将（3.60）式中的第一个方程代入第三个方程中，可解出偏转角：

$$
\{\beta\} = -(\{y\}^T[A^a]^{-1}\{\theta\})/\{y\}^T[A^a]^{-1}\{d\}) \tag{3.61}
$$

将（3.61）式及（3.60）式第二个方程代入第一个方程中，则有：

$$
\begin{aligned}
[A^a][K]\{\theta\} &= \overline{q}(\frac{-\{d\}\{y\}^T[A^a]^{-1}}{\{y\}^{\mathrm{T}}[A^a]^{-1}\{d\}}\{\theta\} + \{\theta\}) \\
&= \overline{q}([I] - \frac{\{d\}\{y\}^T[A^a]^{-1}}{\{y\}^{\mathrm{T}}[A^a]^{-1}\{d\}})\{\theta\}
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

这是一个广义特征值问题，求出其最小特征值$\overline{q}_{\min}$，就可得到反效临界速压q_R及反效临界速度V_R。

对于固定机翼，可以求出$[F] = [K]^{-1}$，则可以得到下面形式的标准特征值问题。

$$
\frac{1}{\overline{q}}\{\theta\} = [F][A^a]^{-1}([I] - \frac{\{d\}\{y\}^T[A^a]^{-1}}{\{y\}^T[A^a]^{-1}\{d\}})\{\theta\} \tag{3.63}
$$

可用迭代法求出上述标准特征值问题的最小特征值$\overline{q}_{\min}$。

二、副翼操纵效率

当$q < q_R$时，副翼偏转将引起滚转力矩，使飞机绕机身轴滚转，同时滚转运动会引起一定的滚转阻尼力矩。飞机在滚转力矩作用下，滚转速度不断增大，滚转阻尼力矩也不断增加，当滚转速度增大到某一值时，副翼偏转产生的滚转力矩与滚转引起的阻尼力矩相等，即总的滚转力矩之和为零，飞机达到一个稳定的滚转角速度p。

当飞机以角速度p绕机身轴转动时，在第i个网格处有局部速度py_i，它使该格网处的小块翼面有一附加攻角$-\frac{py_i}{V}$，引入无量纲角速度$\overline{p} = \frac{pl}{V}$（$l$为半展长），则局部附加攻角为$-\frac{\overline{p}y_i}{l}$，如果我们按照对副翼偏转$\beta$角的处理方法，也将各格网处的局部附加攻角视为一种特殊的初始攻角分布，那么它产生的增升可以直接引用前节的气动力分布公式，即：

$$
\{L_p\} = -\overline{q}([K][A^a] - \overline{q}[I])^{-1}[K]\frac{\overline{p}}{l}\{y\} \tag{3.64}
$$

在 $q < q_R$ 时，副翼偏转 β 角后的总增升为：

$$\{L\} = \bar{q}\beta([K][A^a] - \bar{q}[I])^{-1}[K]\{d\} - \bar{q}\frac{\bar{p}}{l}([K][A^a] - \bar{q}[I])^{-1}[K]\{y\} \tag{3.65}$$

滚转力矩的总和为：

$$M_x = \{y\}^T\{L\} \tag{3.66}$$

当飞机达到稳定滚转角速度时，$M_x = 0$，即：

$$\bar{q}\beta\{y\}^T([K][A^a] - \bar{q}[I])^{-1}[K]\{d\} - \bar{q}\frac{\bar{p}}{l}\{y\}^T([K][A^a] - \bar{q}[I])^{-1}[K]\{y\} = 0 \tag{3.67}$$

从而三元机翼的副翼操纵效率为：

$$\eta = \frac{\partial(\bar{p}/l)}{\partial\beta} = \frac{\{y\}^T([K][A^a] - \bar{q}[I])^{-1}[K]\{d\}}{\{y\}^T([K][A^a] - \bar{q}[I])^{-1}[K]\{y\}} \tag{3.68}$$

最后需要指出的是，本章的讨论均是基于飞机为平飞状态，未考虑机动飞行时飞机有过载的情况。对于有过载的机动飞行情况，其气动弹性静力学问题的基本原理和公式推导与本章介绍的方法是完全相同的。另外，在对某一机翼求其扭转发散临界速度时，要分别考虑气动载荷对称分布及气动载荷反对称分布的情况，取两种情况下较小的那个临界速度作为扭转发散临界速度。同样，在求反效临界速度时，要同时求出扭转发散临界速度，如果 $V_D < V_R$，则 V_D 亦是反效临界速度。

第四章　颤振的基本概念和机理

§4.1 引言

气动弹性动力学问题中，颤振问题占有相当重要的地位，在飞机设计工程中，颤振分析也是一个非常广泛的题目，随着飞机设计的发展，颤振分析的内容也由经典的机翼线性颤振分析拓展出机翼非线性颤振分析、带外挂物的机翼颤振分析、操纵面颤振分析以及全机伺服颤振分析等新的内容和分支。本章首先对经典机翼颤振的概念和机理进行讨论，使得对颤振问题有一个定性的了解，为进一步的颤振分析工作做准备。

简而言之，颤振就是飞机及其部件处于气流中的一种动不稳定性问题，这种动不稳定性是怎样产生的呢？

我们知道，如果飞机在地面上受到扰动而引起振动，由于结构中总存在结构阻尼、摩擦阻尼等阻尼因素，飞机的振动会不断衰减直至消失。但对于在空中飞行的飞机，如果受到某种扰动而引起振动，即使飞机结构存在阻尼，情况也会与在地面上有所不同，因为处于气流中的飞机在振动时，会引起附加的气动力，在这些附加的气动力中，有些将起到激励力的作用，有些将起到阻尼力作用，这样，飞机的振动一旦被激起，就可能会有下述三种情况：(I)振幅不断衰减而振动最终消失；(II）振幅不断扩大而结构最终发生破坏；(III）振幅保持不变而呈等幅的简谐振动。如果振动最终是衰减的，则我们称结构是动力稳定的；反之，如果振动最终是发散的，则我们称结构是动力不稳定的；如果振动始终维持在等幅状态，则称结构处于临界稳定状态。通常在气动弹性动力学问题中，把由于气动弹性效应引起的飞机及其部件在气流中发生的不衰减的且振幅相当大的振动称为颤振。颤振对于飞机来说是一种相当危险的振动，一旦发生，将在数十秒甚至几秒种内使飞机结构发生毁灭性的破坏。从后面的分析我们也会知道，飞机的颤振是由于机翼等飞机的升力面结构在气流中运动引起的附加气动力激励下发生的，运动一旦停止，附加气动力也就消失，所以颤振是一种结构与气流相互耦合作用下的自激振动，这也是颤振的独特性质。

对飞机颤振问题的理论分析与飞机颤振设计的工程实践表明，对于飞机来说，当飞行速度由小到大增加时，由扰动引起的振动会由衰减的变为发散的，即当飞机速度较小时，这种振动会很快衰减，随着飞行速度的增大，则衰减也相应减慢，当飞行速度达到某一个量值时，扰动所引起的飞机振动刚好维持飞机的等幅简谐振动，这个速度在颤振分析中被称为颤振临界速度，简称颤振速度。若飞行速度继续增大，则扰动所引起的振动幅值就会持续扩大而成为发散振动，即发生了颤振。由于飞机是一个非常复杂的结构，它受扰动后可能发生多种振动模式，对于每一种振动模式，都可以在某一个临界速度下发生颤振，因而对于同一架飞机，可能存在有多个颤振临界速度。从工程颤振分析的角度讲，只有其中最小的那个颤振临界速

度才有实际意义。所以，我们在以后计算颤振临界速度时，都是指计算最小的颤振临界速度。而计算飞机颤振临界速度，正是飞机颤振分析的主要任务之一。

计算颤振临界速度的问题，实际上是研究在气流中飞机结构的振动运动稳定的临界条件问题，即在多大的一个飞行速度下，飞机结构的振动会成为等幅简谐振动。因此，在计算临界颤振时，我们只需要考虑作简谐振动的飞机结构产生的气动力就可以了，并且在经典颤振分析中，往往只限于研究微幅振动运动的稳定性，故在计算气动力时也就可以应用小扰动的线性化气动力理论。一般说来，飞机颤振作为气动弹性动稳定性问题，具有多种形态，对于某些形态，其发生的机理有时相当深奥甚至难以理解，从空气动力产生的原因而言，颤振可以分为两大类，第一类发生在势流中，而且主要发生在飞机的流线型剖面升力系统中，即翼面颤振，也就是通常所称的“ 经典颤振 ”; 第二类颤振称为失速颤振，它与流动分离和旋涡形成有直接关系，其机理与经典颤振不同，且一般发生在螺旋桨、旋翼桨叶、涡轮叶片等产生气动力的旋转机械部件上，对于机翼和尾翼这类固定翼飞行器的升力面则很少遇到失速颤振问题。本书只研究固定翼飞行器升力面的经典颤振问题，这种颤振在飞机设计的工程实际中也是最危险的，在气动弹性动力学问题中，对它的研究最广泛且研究方法也最成熟。

§4.2 颤振产生的机理

前面已经指出，机翼的颤振是由空气动力与结构间的相互耦合作用所引起的振动，这是由于在机翼振动过程中，弹性力与惯性力作为保守系统的内力总是处于平衡状态，因此，机翼在一个振动周期内的势能和动能之和保持为常数，如果要机翼获得振动激励，只有从气流中获取能量，如果这个能量大于机翼的结构阻尼所消耗的能量，就会发生颤振。机翼作为一个弹性体，在振动中通常同时具有弯曲与扭转两种变形模态，我们称之为弯扭耦合振动。由机翼弯扭耦合振动而导致的颤振，称为弯扭耦合颤振，下面以振动弹性机翼的一个典型剖面为对象，从定性的角度来分析其产生的机理。

设机翼剖面的重心位于其刚心之后，则机翼在受到扰动后产生的弯扭耦合振动情况如图 4-1（a）所示，图中偏离平衡位置的机翼由于弹性恢复力的作用而向下作加速运动，其惯性力（向上）通过重心，它会产生一个对机翼剖面刚心的低头力矩，使机翼在做弯曲运动的同时还会有扭转运动。记该机翼剖面的低头扭转角为 θ，则机翼剖面在顺气流方向的攻角相应会减小 θ，从而机翼剖面上产生一个向下的附加气动力 ΔL_θ，它与机翼运动的方向相同，是促使机翼向下运动的力，也就是说，ΔL_θ 是激振力；同时机翼的弯曲振动，使机翼剖面做向下的运动，机翼剖面向下的运动速度导致其周围的空气具有一个向上的所谓相对风速 w，它使机翼与气流间原来相对速度的大小和方向都发生改变。设原来机翼与气流间的相对速度为 V，则如图 4-1（b）所示，由于弯曲振动带来的相对风速，结果相当于使机翼的气动攻角改变了 $\Delta\alpha$，相应的，机翼会受到一个附加气动力为 ΔL_α，且它总是和机翼弯曲振动的方向相反，因此它具有阻尼力的性质，起到阻碍振动的作用。

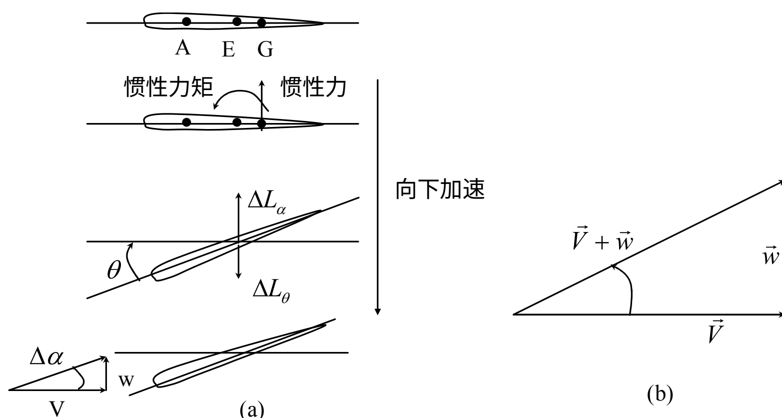


图4-1　机翼弯扭耦合颤振机理示意图

总而言之，飞行中飞机的机翼在作弯扭振动时，会产生两种附加的气动力 ΔL_θ 和 ΔL_α，两者的作用性质相反，ΔL_θ 是激振的，ΔL_α 是阻振的，而机翼后续的振动性质就与这两个附加气动力的相对大小有密切的关系。下面我们来分析这两种力与飞行速度 V 的关系。

按照空气动力学理论中的升力公式，由攻角 θ 所产生的附加气动力可表示为：

$$\begin{aligned}\Delta L_\theta &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\theta \\ &= \frac{1}{2}\rho S\theta\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}V^2\end{aligned} \tag{4.1}$$

即 ΔL_θ 与速度平方成正比。

由攻角 $\Delta\alpha$ 产生的附加气动力也可以用升力公式表示为：

$$\begin{aligned}\Delta L_\alpha &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\Delta\alpha \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\frac{w}{V} \\ &= \frac{1}{2}\rho VS\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}w\end{aligned} \tag{4.2}$$

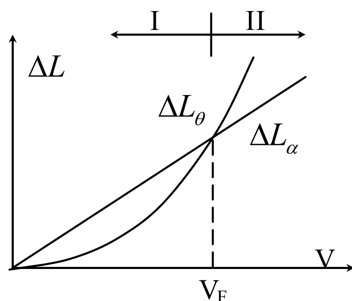


图 4-2 弯扭振动机翼上的附加气动力

即ΔL_α与飞行速度V成正比。将ΔL_θ和ΔL_α随V的变化规律定性地画成曲线如图 4-2 所示，显然，$\Delta L_\theta \sim V$曲线是抛物线而$\Delta L_\alpha \sim V$曲线是直线，记两者的交点处速度值为V_F，则它将速度轴划分为两个范围，可以明显看出，在速度范围 I 内，阻振力ΔL_α比激振力ΔL_θ大，因此在速度范围 I 内，机翼的振动是衰减的；而在速度范围 II 内，激振力ΔL_θ比阻振力ΔL_α大，机翼的振动会不断增大直至机翼结构发生破坏，即发生颤振；在V_F处，激振力与阻振力相等，机翼振动处于发散的临界状态而呈等幅简谐振动。速度V_F就是所谓的颤振临界速度。由此我们再次看到，机翼发生颤振是因为有附加气动力在对机翼进行激振的缘故，也就是说，颤振是在有气流不断输入能量给机翼的情况下才产生的，所以它与自由振动不同。另一方面，促使机翼振动发散的附加气动力，完全是由于机身本身弯扭耦合变形，形成相对气流才产生的，即激振力由运动直接引起，因而又与强迫振动有区别，它属于振动理论中所定义的自激振动。

总之，这里可以把弯扭耦合颤振的机理归结为：由于在气流中弹性机翼的弯曲、扭转两个自由度的惯性耦合，使弯曲运动引起扭转运动，而机翼成为一个能量转换开关，它将均匀来流的能量转换成具有往复振动性质的能量，从而导致机翼颤振的发生。

从前面的讨论知道，机翼向下弯曲运动会引起低头扭转（在振动理论中称为弯曲运动的相位超前扭转运动的相位），是由于机翼重心位于刚心之后，引发弯扭耦合颤振。按照上述颤振机理所阐述的概念，在飞机工程的颤振设计工作中，对飞机操纵面常常采用加配重使剖面重心前移的办法来提高颤振临界速度甚至完全排除颤振的发生。

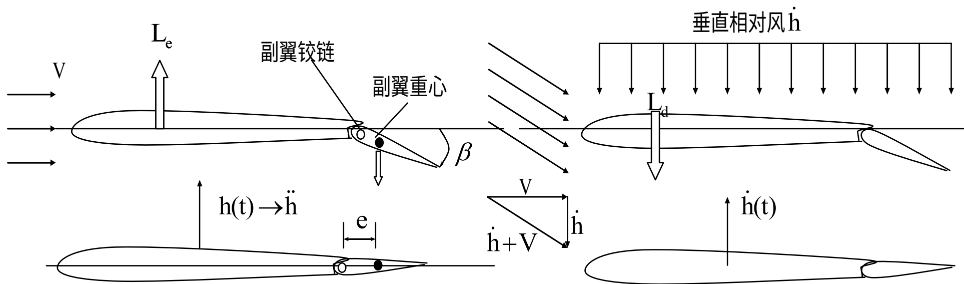


图 4-3 机翼弯曲/副翼偏转耦合颤振机理示意图

图 4-3 所示为带副翼机翼的一个典型剖面在气流中振动时产生附加气动力的情况，与机翼弯扭耦合颤振情况的分析类似，当机翼作向上的振动运动时，副翼产生向下的惯性力，它作用于副翼重心，从而产生对副翼偏转铰链轴的顺时针力矩$m_a\ddot{h}e$，使得副翼向下偏转β角，由此在机翼上产生一个附加的升力$L_e = C_L^\beta \cdot \beta \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 S$，即$L_e$促进机翼的向上运动，相当于一种激振力。

另一方面，当机翼向上运动时，使得机翼附近的空气产生一个向下的相对风速 $\dot{h}$ ，从而使得机翼具有一个负的附加攻角 $-\left(\frac{\dot{h}}{V}\right)$ ，由此机翼产生一个向下的附加气动力 $L_d = C_L^\alpha\left(-\frac{\dot{h}}{V}\right)\frac{1}{2}\rho V^2 S$ ，即 L_d 阻碍机翼的向上运动，相当于一种阻尼力。

同样可以将上述附加气动力 L_e 及 L_d 与速度 V 的关系定性地画成类似图 4-2 所示的曲线，它同样存在一个临界速度 V_F ，当 $V < V_F$ 时， $L_d > L_e$ ，机翼的振动运动是衰减的；当 $V > V_F$ 时， $L_e > L_d$ ，机翼的振动运动是发散的。V_F 就是机翼弯曲—副翼偏转型颤振的临界速度。

由以上分析可见，若副翼重心前移到与副翼偏转的铰链轴重合，则机翼弯曲振动将不会引起副翼的偏转，因而这种耦合型的颤振就不会发生。

上述颤振机理分析中没有计及各种运动之间的相位差以及振动中空气动力的复杂性，因此没有定量意义，而且在定性分析方面也不够严格。但由此所得到的结论，即机翼颤振总是由于机翼某两种运动模态的相互耦合，从而形成一种能量转换器，使直行的气流产生了能促使机翼振动的附加气动力而发生的。若能使该两种模态的运动解耦（即解除它们之间耦合的可能性），则颤振就不会发生。这就是飞机设计工程中防颤振设计的一个经验性原则，即所谓的“模态解耦”原则。该原则最为广泛的应用实例，就是第七章中介绍的操纵面质量平衡。

当然，飞机的颤振还有许多类型，它们产生的机理有的可以根据基本的力学概念来定性地加以解释，然而，比较精确的分析还得借助于比较完善的气动力理论，结合各种颤振分析理论和方法通过数值计算来完成。在后续的章节中，将陆续介绍有关的颤振分析理论和方法。

§4.3 颤振分析的频率重合理论

许多工程颤振分析的实例表明，对于像真实机翼这样一个多自由度系统，在其发生颤振的临界点附近，常常会有两个在气流中的振动模态分支的频率相互接近的现象，从振动理论的角度看，频率接近意味着两个振型的耦合性加强，由此，英国学者 Pines 据此提出了一种高度简化的颤振分析理论——频率重合理论。频率重合理论对颤振产生的机理解释为：当飞机的速度增大时，会使飞机结构的某两个振型分支的频率发生变化而相互接近，直到这两个分支的频率完全相等（即重合），这两个振型分支的耦合振动就有可能从气流中吸收能量，从而达到颤振临界点而发生颤振。

下面我们以一个具有上下平移（代表机翼弯曲）和俯仰（代表机翼扭转）两个振动自由度的二元机翼为研究对象，从力学机理和数学解析的角度，来说明频率重合理论。在频率重合理论中，气动力采用定常气动力理论，即假设升力仅与每一时刻的实际攻角有关。

考察如图 4-4 所示的二元机翼在气流中的振动，机翼以扭转弹簧（记弹性系数为K_α）及拉压弹簧（记弹性系数为K_h）支持在刚心E点处，机翼质量为m，重心在G点，重心距刚心的距离为σ，气动中心A到刚心的距离为e，取刚心处上下平移位移h（向下为正）与绕刚心的俯仰角α（抬头为正）为机翼的两个广义坐标，并以其静平衡位置为起点，由拉格朗日方程可以得到二元机翼的颤振方程为：

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + K_h h = -L \\ S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha = e \cdot L \end{cases} \tag{4.3}$$

其中，$S_\alpha = m\sigma$ 是机翼对刚心的质量静矩

$I_\alpha = mr_\alpha^2$ 是机翼对刚心的转动惯量

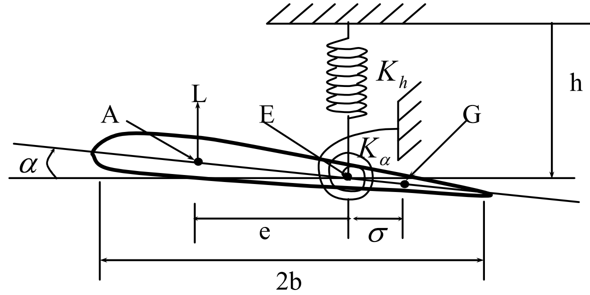


图 4-4 气流中的振动二元机翼

按照定常气动力理论：

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha \\ &= qS \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha \end{aligned} \tag{4.4}$$

则颤振运动方程为：

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + K_h h + qS \dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha = 0 \\ S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha - qS \dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha \cdot e = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

设上方程组的一般解为：

$$\begin{cases} h = h_0 e^{\lambda t} \\ \alpha = \alpha_0 e^{\lambda t} \end{cases} \tag{4.6}$$

其中，λ为待求常数，可能为复数，记$\lambda = \gamma + i\omega$，$\gamma$、$\omega$都是实数，则：

$$e^{\lambda t} = e^{\gamma t} \cdot e^{i\omega t} = e^{\gamma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t) \tag{4.7}$$

根据振动理论，根据λ的解，相应的振动运动可能有下列三种情况：

1） $\gamma < 0$，表明振动运动是衰减的，机翼系统是稳定的。

2） $\gamma > 0$，表明振动运动是发散的，机翼系统是不稳定的，即发生了颤振。

3） $\gamma = 0$，则 $e^{\lambda t} = e^{i\omega t}$ 表明运动是简谐振动，机翼系统处于临界稳定状态。

将（4.6）式代入（4.5）式，并消去公因子 $e^{\lambda t}$，得到关于 λ 的代数方程组：

$$\begin{bmatrix} m\lambda^2 + K_h & S_\alpha \lambda^2 + qS\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ S_\alpha \lambda^2 & I_\alpha \lambda^2 + K_\alpha - qSe\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_0 \\ \alpha_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

从而得到其特征方程：

$$A\lambda^4 + B\lambda^2 + C = 0 \tag{4.9}$$

其中，

$$\begin{aligned} A &= mI_\alpha - S_\alpha^2 \\ B &= mK_\alpha + I_\alpha K_h - (me + S_\alpha)qS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ C &= K_h(K_\alpha - qSe\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

由（4.9）式解得：

$$\lambda^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{4.11}$$

显然，在静止气流中，$q = 0$，故 $B > 0,\ B^2 - 4AC > 0$，λ^2 是两个负实数，即 λ 为纯虚数，这样就求得了机翼在静止气流中的两个振动频率（即无阻尼自由振动频率），这时 $\gamma = 0$，振动是简谐的。当气流速度不为零时，$q > 0$，如果仍有 $B > 0$，$B^2 - 4AC > 0$，则机翼仍有两个振动频率，其值随气流速度变化，但机翼的振动仍是稳定的，当 q 增大到使 $B^2 - 4AC < 0$ 时，λ^2 成为复数，那么至少会有一个 λ 值的实部 γ 是正的，则机翼的振动幅值将不断扩大而发生颤振，即机翼在气流中的运动成为不稳定的。由此看到，$B^2 - 4AC = 0$ 成为机翼在气流中运动稳定与不稳定的分界点。因 B、C 都与 q 有关，上述条件实际上是关于 q 的一个临界方程，由该方程求出的最小正实数 q_F，就是颤振临界速压。进一步我们看到，此时 $\lambda^2 = -\dfrac{B}{2A}$ 是方程（4.9）的重根，根据（4.7）式知，此时机翼的振动频率退化为一个。

因而，我们可以推演出这样的结论：当气流速度增大到使机翼在气流中的两个振动频率相等时，就达到机翼的颤振临界点。图 4-5 中的虚线画出了根据定常气动力理论得到的气流中振动机翼的两个振动频率随气流速度增大而逐渐接近、最终重合而相等的情况。如果采用后面介绍的较复杂的气动力理论如准定常气动力理论或非定常气动力理论，则在气流中机翼的两个振动频率也会随着气流速度的增大而相互接近，但却不会相等，如图 4-5 中的实线所示。上述的频率重合理论除了能用来定性地解释颤振发生的机理外，也可以用来定量估算颤振速度，当然这样得到的计算结果精度较低。

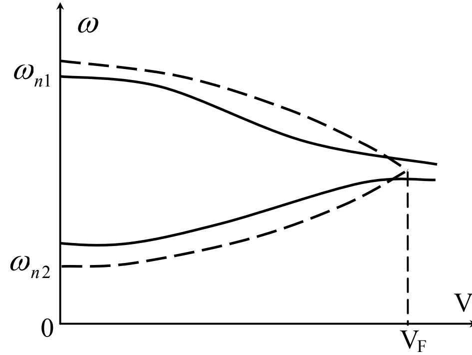


图 4-5 二元机翼的频率重合现象

[例] 试求图 4-3 中二元机翼的颤振临界速度，已知二元机翼的参数为：

$b = 1$米, $\dfrac{\pi\rho \mathrm{bS}}{\mathrm{m}} = 0.1$, $\dfrac{I_\alpha}{mb^2} = 0.5$, $\dfrac{S_\alpha}{mb} = 0.25$, $\dfrac{\omega_h}{\omega_\alpha} = 0.5$, $\dfrac{e}{b} = 0.4$, $\omega_\alpha = 62.83\mathrm{rad}/s$，这里

$\omega_h = \sqrt{\dfrac{K_h}{m}}$ $\omega_\alpha = \sqrt{\dfrac{K_\alpha}{I_\alpha}}$ 分别称为机翼上下平移和俯仰运动的“非耦合固有频率”，又称为“部份频率”，即机翼分别仅能作上下平移或俯仰振动时的固有频率，以后用到它们时不再说明。

[解]：将升力系数斜率的理论值 $\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 2\pi$ 代入（4.5）式，并将其化为如下形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{h}}{b} + \dfrac{S_\alpha}{mb}\ddot{\alpha} + \omega_h^2 \dfrac{h}{b} + \dfrac{\pi\rho bS}{m} \cdot \dfrac{V^2}{b^2}\alpha = 0 \\ \dfrac{bS_\alpha}{I_\alpha}(\dfrac{\ddot{h}}{b}) + \ddot{\alpha} + \omega_\alpha^2\alpha - (\dfrac{\pi\rho bS}{m})(\dfrac{mb^2}{I_\alpha})(\dfrac{e}{b})\dfrac{V^2}{b^2}\alpha = 0 \end{cases}$$

将 $h = h_0 e^{\lambda t}$ $\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}$ 及已知参数值代入上方程，消去公因子 $e^{\lambda t}$ 得关于 $\dfrac{h_0}{b}$ 及 α_0 的齐

次代数方程组：

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+\omega_h^2 & 0.25\lambda^2+0.1\dfrac{V^2}{b^2} \\ 0.5\lambda^2 & \lambda^2+\omega_\alpha^2-0.08\dfrac{V^2}{b^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{h_0}{b} \\ \alpha_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

从而得到特征方程：

$$0.875\lambda^4+(\omega_\alpha^2+\omega_h^2-0.13\frac{V^2}{b^2})\lambda^2+\omega_h^2\omega_\alpha^2-0.08\omega_h^2\frac{V^2}{b^2}=0$$

λ 有重根的条件为：

$$(\omega_h^2+\omega_\alpha^2-0.13\frac{V^2}{b^2})^2-4\times0.875\times(\omega_h^2\omega_\alpha^2-0.08\omega_h^2\frac{V^2}{b^2})=0$$

代入 $\dfrac{\omega_h}{\omega_\alpha}=0.5, b=1\ \omega_\alpha=62.83rad/s$，解得两个相应的颤振临界速度为：

$$V_{F1}=117.8m/s \quad V_{F2}=213.7m/s$$

从运动稳定性角度讲，当气流速度 $V<V_{F1}$ 时，运动是两个简谐振动的组合，运动是稳定的；当 $V_{F1}<V<V_{F2}$ 时，运动是发散的；当 $V>V_{F2}$ 后，运动又恢复稳定。但是，对飞机设计这一工程实际问题来说，显然只有最低的颤振临界速度 V_{F1} 才有实际意义。故本例中机翼的颤振临界速度为117.8 m/s，并由此可求得相应的颤振频率为 $\omega_F=42.3rad/s$。

由于频率重合理论所用的气动力公式过于简单，所以这种理论不能直接用于工程颤振分析和飞机设计中，但此理论对颤振机理的解释却使我们知道，两个振动模态的频率彼此越接近，就意味着该两个模态的耦合作用越强。对具有更多振动模态的实际飞机，也就是说，总是在某两个模态耦合较强的情况下，才会产生均匀气流的能量转换而引发颤振，因此，在飞机设计时，尽量避免飞机结构各个固有振动模态的频率相互接近，这已成为防颤振设计的一条准则。

§4.4 设计参数对颤振速度的影响

从前面几节的讨论中，我们已知道，颤振是由于飞机结构与气流间的相互耦合作用而产生的动不稳定性问题，其形式多种多样，机理各不相同，对于有些形式复杂的颤振，其机理难以用文字加以简单的描述。而颤振分析的工程实践也表明，颤振设计工作除了需要理论上严密的计算和必要的试验研究外，还要借助于清楚的工程概念并依靠许多定性的设计经验。

也就是说，在进行飞机结构的防颤振设计时，要求设计人员不仅要清楚诱发颤振产生的基本原因，而且要知道结构参数或气动参数对颤振的定性影响，以便在设计时进行参考。下面就给出根据工程颤振分析的经验得到的一些普遍性结论。

（1）弯曲刚度与扭转刚度的影响

大量颤振计算和颤振风洞试验证明,机翼的扭转刚度和弯曲刚度对颤振速度有较大影响，通过对机翼颤振方程的量纲分析，可以得知，当弯曲刚度和扭转刚度同时增大n倍，那么颤振速度约增大$\sqrt{n}$倍。若分别单独考察弯曲刚度和扭转刚度的影响，则扭转刚度的影响要大得多，保持弯曲刚度不变，只将扭转刚度增加（减小）n倍，则颤振速度会相应增大（减小）$k \cdot n$倍。对于不同机翼，k有不同值，通常$k = 0.55 \sim 0.6$。对于现代蒙皮受力的机翼，只增加弯曲刚度时，V_F甚至会下降。这是由于在颤振时，弯曲与扭转要以同一颤振频率联合振动，一般情况下，机翼扭转固有频率比弯曲固有频率高，要使它们以同一频率联合振动，必须由外界获得能量，当只提高弯曲刚度时，弯曲固有频率提高而接近扭转固有频率，故只需要较小的外界能量就能使弯曲、扭转以同一频率振动，也就是颤振临界速度降低。如果机翼某阶弯曲振型的固有频率与某阶扭转振型的固有频率非常接近，则会得到最小的V_F。这里还要指出，增加刚度通常伴随着飞机结构重量的增加，因此，这种措施会降低飞机的性能。

图 4-6 画出了二元机翼颤振临界速度随弯扭频率比$\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$变化的典型情况。

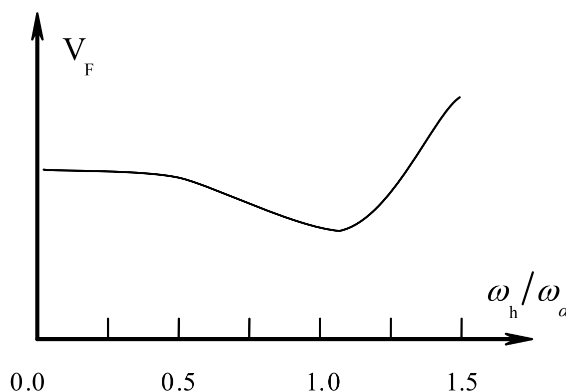


图 4-6 颤振速度随弯扭频率比变化曲线

（2）弦向剖面重心、刚心位置的影响

重心在弦向的位置对V_F影响很大，按照弯扭耦合颤振机理知，重心后移会使V_F降低，反之重心前移则使V_F提高，重心位于刚心之前则不会发生颤振。当然，在整个机翼上实现这一点是非常困难的，但在飞机设计工程中，常采用这种概念来防止操纵面的颤振，即在操纵面的前缘放置一定的配重，使操纵面重心前移到转轴（刚轴）之前，来提高颤振临界速度。如果重心位置不能变动，那么使刚心后移，也会使颤振临界速度提高；如果保持重心与刚心

间距离，而使它们一起向前缘移动，也会使颤振临界速度增大。

（3）集中质量的影响

机翼上刚性连接的质量对颤振的影响主要是通过对机翼弯曲或扭转模态频率的影响来体现的。它对颤振的定性影响规律可以通过（1）中的讨论进行推论。机翼上外挂的重物（简称为外挂物）与挂架的连接刚度，都对机翼的颤振速度有很大影响，且十分不具规律性，外挂物的质量和转动惯量以及它们在弦向和展向位置的改变，可能使颤振速度提高，也可能使颤振速度降低。通常翼尖外挂物将使颤振速度降低。外挂物有时甚至使颤振模态发生转变。随着现代飞机特别是战斗机机翼下外挂物的增多，带外挂物的机翼颤振问题已经成为颤振分析的一个分支，是颤振分析的一个专门的课题，机翼/外挂颤振分析也成了战斗机设计中必须研究的问题。

（4）机翼平面形状的影响

当翼展和机翼面积不变时，根梢比η愈大，则颤振速度也越高，因为当η增大时，翼尖部分翼弦减小，该处（颤振经常开始发生在此处）的气动力减小，从而推迟颤振的发生。

（5）飞行高度的影响

随飞行高度的增高，大气密度ρ相应减小，因速压应相同，故飞行高度越高，颤振速度越高，若在海平面上大气密度为ρ_0，在海平面上颤振速度为V_{F0}，则在高度为H处的颤振速度为：

$$V_{FH} = V_{F0}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_H}} \tag{4.12}$$

（6）空气压缩性的影响

当马赫数$M > 0.5$时，应该考虑空气压缩性的影响，但在亚音速和低超音速情况下，空气压缩性对颤振速度影响不大，改变量在 10%左右，在马赫数$M = 1$附近的跨音速区，颤振速度一般降低较大，在$V_F \sim M$曲线上出现所谓的“凹坑”效应，如图 4-7 所示为一后掠机翼的颤振速度随马赫数变化的曲线。如何在颤振分析中考虑空气压缩性影响，将在后面的章节中有关的颤振计算方法中介绍。

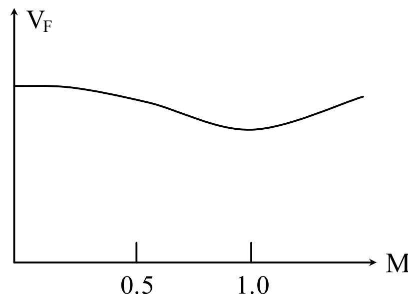


图 4-7　跨音速区的压缩性效应

（7）结构阻尼的影响

按照能量角度对颤振机理的解释，如果结构的阻尼增加，激发颤振所需要的外界气流能量也增大，颤振速度相应提高，所以采用大阻尼材料或阻尼器，一般可以使机翼颤振速度得到提高。但由于结构阻尼水平通常难以准确测定，故在实际的工程颤振计算中，一般仍以结构阻尼为零来计算得到比较保守的颤振速度。需要注意的是，在操纵面防颤振设计中应谨慎使用增加阻尼来提高颤振速度的办法，因为在一架 $E-6A$ 通信中继飞机上曾发生过增加调整片铰链的阻尼反而使调整片-方向舵-垂尾型颤振的临界速度降低的事故。对于操纵面颤振问题，更多的是采用第七章中介绍的质量平衡方法。

第五章　二元机翼的颤振分析

§5.1 引言

作为工程颤振分析的基础，本章以二元机翼作为分析对象，介绍用于颤振分析的准定常气动力理论和非定常气动力理论以及求解颤振方程的各种方法，并引入减缩频率的概念。二元机翼只有上下平移和俯仰两个自由度，其颤振方程为二阶齐次微分方程组，从而可将求解颤振临界速度的问题归结为数学上求解特征方程最小根的问题或求解矩阵特征值问题最小特征解的问题。

二元机翼的颤振方程求解虽然相对简单，但在其求解过程中，却几乎包含了颤振分析和求解方法中所有的概念和步骤，而且在颤振分析这一研究领域中，通过对二元机翼的颤振分析可以得出许多有用的结论。作为原理性研究的理论模型，二元机翼颤振模型经常被采用的原因，是由于二元机翼颤振分析得到的结论大都可以推广到实际三元机翼的情况，特别是对于初学者，从二元机翼颤振分析入手，可以较容易地建立起颤振分析中的一些基本概念，很快掌握颤振分析的基本方法，为工程颤振分析打下基础，这也是我们专门讨论二元机翼颤振问题的目的。为此，下面首先介绍颤振分析中要用到的，不可压缩气流中振动二元机翼的气动力计算方法。

§5.2 不可压缩气流中振动二元机翼的气动力计算

为了比较精确地计算二元机翼的颤振临界速度，不能再使用定常气动力。正如在上一章中定性分析颤振机理时所看到的，机翼在气流中的振动会引起附加的气动力，根据确定机翼流场时所用的薄翼理论基本方程及对边界条件的不同处理，而分别有格罗斯曼准定常气动力理论和西奥道生非定常气动力理论。

一、格罗斯曼准定常气动力理论

由薄翼绕流理论知，机翼可以用一连续分布的旋涡（称为附着涡）来代替。如图 5-1(a)所示，当机翼作振动运动时，升力和附着涡的强度都随时间变化，但是包围在所有奇点周界内的总环量，在非粘性流中必须保持为零，因而附着涡线必然会从薄翼后缘脱落下来并被气流沿流线带向下游，形成所谓的“ 尾涡 ”，如图 5-1(b)所示。在计算振动机翼的气动力时，必须考虑这些尾涡对机翼上各点的诱导速度，而尾涡强度的确定是相当困难的。为了简化计算，在格罗斯曼的准定常理论中认为，尾涡对机翼的影响可以忽略不计，即仍采用定常气动力理论中的基本积分方程来确定翼面诱导速度分布，但在处理绕流边界条件时，准定常理论认为，在考虑翼面绕流的无分离条件，即计算翼面下洗速度时，不仅要考虑在某一瞬时机翼所具有的攻角迫使气流向下的偏转，而且要考虑在该瞬时机翼表面某点处的向下速度也会驱使该处

的流体质点具有相同的向下速度，即翼面下洗速度w应等于$V\alpha$加上翼面上一点因振动而具有的向下速度。

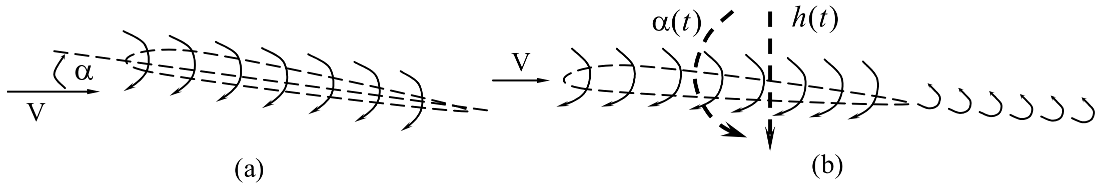


图 5-1 在气流中振动二元机翼的附着涡和尾涡

如图 5-2 所示，设二元机翼的弦长为$2b$，机翼的运动可用两个广义坐标来表示，即刚心E点的上下平移h（向下为正）和绕E点的俯仰角α（抬头为正），E 点距翼弦中点为ab，a是一个无量纲系数，当E点位于翼弦中点之后时为正。由图可知，翼面上坐标为x的一点处，其向下的速度是随刚心E上下平移运动的速度以及绕刚心E的转动速度，即翼面下洗速度为：

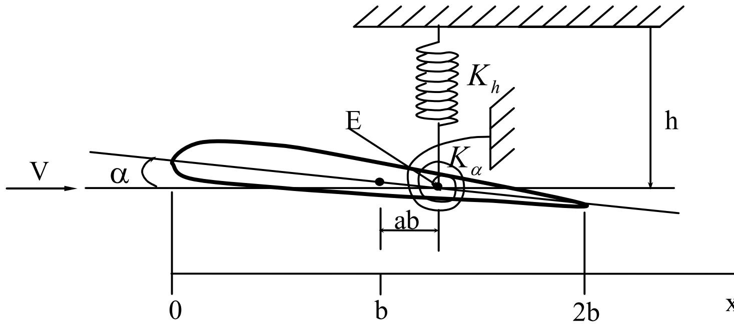


图 5-2 在气流中的振动二元机翼

$$w(x)=V\alpha+\dot{h}+[x-(1+a)b]\dot{\alpha} \tag{5.1}$$

这个方程在薄翼理论范围内是精确的边界条件。

但是，准定常理论在由边界条件来确定流场，进而确定翼面压力分布时，却不使用精确的关系式，而是引用定常理论中的关系式，即使用薄翼绕流理论中的基本积分公式：

$$w(x)=\int_0^{2b}\frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} \tag{5.2}$$

采用级数解法，令：

$$\begin{cases} x=b(1-\cos\theta) \\ \xi=b(1-\cos\phi) \end{cases} \tag{5.3}$$

则：

$$d\xi = b\sin\phi d\phi \tag{5.4}$$

将γ(ϕ) 展开成级数形式：

$$\gamma(\phi) = A_0 \cot\frac{\phi}{2} + \sum A_n \sin(n\phi) \tag{5.5}$$

代入（5.2）式，经逐项积分，最后可得：

$$w(\theta) = \frac{1}{2}(A_0 - \sum A_n \cos n\theta) \tag{5.6}$$

将边界条件（5.1）式展开成余弦级数，代入上式并比较两端同类项系数，可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi w(\theta)d\theta \\ -\frac{1}{2}A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi w(\theta)\cos n\theta d\theta \quad (n = 1,2,3,\cdots) \end{aligned} \tag{5.7}$$

注意到：

$$w(\theta) = V\alpha + \dot{h} + [b(1-\cos\theta) - (1+a)b]\dot{\alpha} \tag{5.8}$$

可求得：

$$\begin{aligned} A_0 &= 2V[\alpha + \frac{1}{V}(\dot{h} - ab\dot{\alpha})] \\ A_1 &= 2b\dot{\alpha} \quad A_l = 0\ (l = 2,3,\cdots) \end{aligned} \tag{5.9}$$

从而得到翼面的涡强分布（也就是压力分布）为：

$$\gamma(\phi) = 2V[\alpha + \frac{1}{V}(\dot{h} - ab\dot{\alpha})]\cot\frac{\phi}{2} + 2b\dot{\alpha}\sin\phi \tag{5.10}$$

根据儒可夫斯基定律，作用在单位展长机翼上的气动力（向上为正）：

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2b} \rho V\gamma(\xi)d\xi \\ &= \int_0^\pi \rho V\gamma(\phi)b\sin\phi d\phi \\ &= 2\pi\rho V^2 b[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + (\frac{1}{2} - a)b\frac{\dot{\alpha}}{V}] \end{aligned} \tag{5.11}$$

对前缘的力矩（抬头为正）为：

$$
\begin{aligned}
M_{L.E.} &= \int_0^{2b} \rho V \gamma(\xi) \xi d\xi \\
&= \int_0^{\pi} \rho V b^2 (1-\cos\phi)\gamma(\phi)\sin\phi d\phi \\
&= \frac{b}{2} L - \frac{1}{2}\pi\rho V b^3 \dot{\alpha}
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

通常在进行颤振计算时，使用的是对刚心 E 的气动力矩，根据力的等效准则，可求出气动力对刚心 E 的气动力矩（抬头为正）为：

$$
M_E = 4\pi\rho V^2 b^2 (\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4})[\alpha + \frac{\dot{h}}{V} + (\frac{1}{2} - a) b \frac{\dot{\alpha}}{V}] - \frac{1}{2}\pi\rho V b^3 \dot{\alpha} \tag{5.13}
$$

现在我们来对得到的气动力公式和气动力矩公式进行详细的考察，以弄清一些特殊项的含义。很明显，气动力公式中的第一项就是在介绍频率重合理论中使用的定常气动力，第二项就是第二章第一节中所述的附加气动力 $\varDelta L_{\alpha}$，在气动力矩公式中的最后一项 $-\frac{1}{2}\pi\rho V b^3 \dot{\alpha}$ 则是由机翼剖面中点的转动角速度引起的气动阻尼力矩。

需要说明的是，对于准定常气动力，在一些国家也曾经采用过以实验结果为根据的半经验公式，例如在美国曾经使用如下的公式：

$$
\begin{aligned}
L &= qb(l_{\bar{h}}\bar{h} + l_{\dot{\bar{h}}}\dot{\bar{h}} + l_{\ddot{\bar{h}}}\ddot{\bar{h}} + l_{\alpha}\alpha + l_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + l_{\ddot{\alpha}}\ddot{\alpha}) \\
M &= qb^2(m_{\bar{h}}\bar{h} + m_{\dot{\bar{h}}}\dot{\bar{h}} + m_{\ddot{\bar{h}}}\ddot{\bar{h}} + m_{\alpha}\alpha + m_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + m_{\ddot{\alpha}}\ddot{\alpha})
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

上式中 $\bar{h}$ 代表无量纲坐标 $(\frac{h}{b})$，$l_{\bar{h}}, l_{\dot{\bar{h}}}, \cdots m_{\bar{h}}, m_{\dot{\bar{h}}}, \cdots$ 等含义类似于 $\frac{\partial C_L}{\partial \bar{h}}, \frac{\partial C_L}{\partial \dot{\bar{h}}}, \cdots \frac{\partial C_m}{\partial \bar{h}}, \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\bar{h}}}, \cdots$ 等，因此可称之为气动导数，根据它们在气动力公式中的作用，也可把对位移的气动导数 $l_{\bar{h}}, l_{\alpha}, m_{\bar{h}}, m_{\alpha}$ 称为气动刚度，把对速度的气动导数 $l_{\dot{\bar{h}}}, l_{\dot{\alpha}}, m_{\dot{\bar{h}}}, m_{\dot{\alpha}}$ 称为气动阻尼，而把对加速度的气动导数 $l_{\ddot{\bar{h}}}, l_{\ddot{\alpha}}, m_{\ddot{\bar{h}}}, m_{\ddot{\alpha}}$ 称为气动惯性。由于这些气动导数都是实验常数，一般将上述气动力公式归类为准定常气动力公式。

二、西奥道生非定常气动力理论

前面已讲过，振动薄翼理论的真实绕流如图 5-1（b）所示，其特点是由机翼后缘不断产

生真正的小旋涡（自由涡），并顺气流向下游流动，形成所谓的尾涡区，它们与翼面上的附着涡合在一起，诱导出翼面下洗，也就是说，非定常气动力理论考虑了由后缘流下的尾迹中自由涡的影响，这种考虑，在二元流动的范围内是精确的理论。而在要考虑三元效应的非定常气动力理论中，问题就复杂得多，所以在早期工程颤振分析计算中，都用二元非定常气动力理论。然而，即使对二元机翼来说，其非定常气动力公式的求解也是相当困难的。这里将直接引用由西奥道生给出的机翼作弯扭耦合简谐振动时的气动力和气动力矩公式。

在非定常气动力理论中，薄翼绕流的基本方程为：

$$w(x)=\int_0^{2b}\frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)}+\int_{2b}^{\infty}\frac{\gamma_w(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} \tag{5.15}$$

首先要找出尾涡的涡强 $\gamma_w(\xi)$ 与翼面涡强 $\gamma(\xi)$ 的联系，才能求出涡强分布从而求出气动力。西奥道生在“General Theory of Aerodynamic Instability and Mechanism of Flutter（——NACA TR496）”一文中，给出了作简谐振动的二元机翼的非定常气动力。即考虑机翼在不可压缩气流中以频率 ω 作简谐振动：

$$\begin{cases} h=h_0e^{i\omega t} \\ \alpha=\alpha_0e^{i\omega t} \end{cases} \tag{5.16}$$

则作用在机翼上的气动力及对机翼剖面刚心的气动力矩为：

$$\begin{aligned} L&=\pi\rho b^2(V\dot{\alpha}+\ddot{h}-ab\ddot{\alpha})+2\pi\rho VbC(k)[V\alpha+\dot{h}+(\frac{1}{2}-a)b\dot{\alpha}] \\ M_E&=\pi\rho b^2[ab(V\dot{\alpha}+\ddot{h}-ab\ddot{\alpha})-\frac{1}{2}Vb\dot{\alpha}-\frac{1}{8}b^2\ddot{\alpha}] \\ &\quad+2\pi\rho V^2b^2(\frac{1}{2}+a)C(k)[\alpha+\frac{\dot{h}}{V}+(\frac{1}{2}-a)\frac{b\dot{\alpha}}{V}] \end{aligned} \tag{5.17}$$

规定 L 向上为正，M_E 以使机翼前缘抬头为正。

（5.17）式中，$k=\dfrac{b\omega}{V}$ 称为减缩频率（或折合频率），它是一个无量纲量，$C(k)$ 称为西奥道生函数，且 $C(k)=F(k)+iG(k)$，即 $C(k)$ 是减缩频率 k 的复函数。并且：

$$\begin{aligned} F(k)&=\frac{J_1(J_1+Y_0)+Y_1(Y_1-J_0)}{(J_1+Y_0)^2+(Y_1-J_0)^2} \\ G(k)&=-\frac{Y_1Y_0+J_1J_0}{(J_1+Y_0)^2+(Y_1-J_0)^2} \end{aligned} \tag{5.18}$$

其中，J_0,Y_0 是 k 的第一类和第二类零阶标准贝塞尔函数，J_1,Y_1 是 k 的第一类和第二

类一阶标准贝塞尔函数，$F(k), G(k)$ 随 k 变化的曲线如图 5-3 所示，表 5-1 中列出了 $F(k), G(k)$ 的函数值表，可供查用。

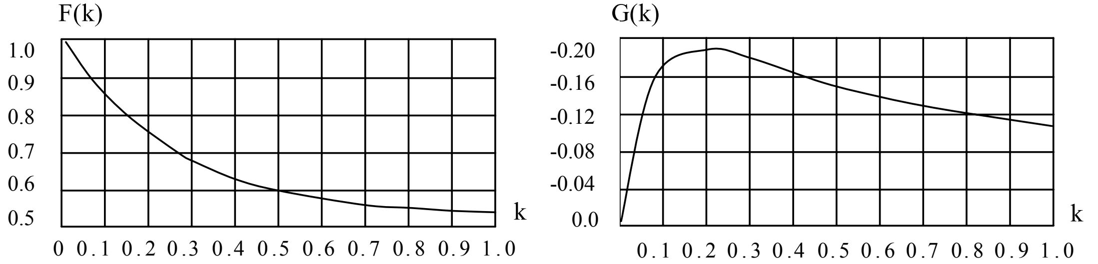


图 5-3　$F(k), G(k)$ 随 k 变化的曲线

在没有西奥道生函数表时，可以采用如下近似公式：

当 $k < 0.5$ 时

$$
\begin{aligned}
F &= 1 - \frac{0.165}{1 + \dfrac{0.00207025}{k^2}} - \frac{0.335}{1 + \dfrac{0.09}{k^2}} \\
G &= -\frac{1}{k}\left(\frac{0.0075075}{1 + \dfrac{0.00207025}{k^2}} + \frac{0.1005}{1 + \dfrac{0.09}{k^2}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

当 $k > 0.5$ 时：

$$
\begin{aligned}
F &= 1 - \frac{0.165}{1 + \dfrac{0.001681}{k^2}} - \frac{0.335}{1 + \dfrac{0.1024}{k^2}} \\
G &= -\frac{1}{k}\left(\frac{0.006765}{1 + \dfrac{0.001681}{k^2}} + \frac{0.1072}{1 + \dfrac{0.1024}{k^2}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

显然上述近似公式仍然满足 $k \to \infty$ 时，$F(k) \to 0.5, G(k) \to 0$，与图 5-3 的曲线趋势一致。

为了说明在非定常空气动力公式中 $C(k)$ 及 k 的物理含义，让我们对气动力和气动力矩中各项的物理意义进行考察。

在气动力公式中的第一项，$\pi\rho b^2(\ddot{h} - ab\ddot{\alpha} + V\dot{\alpha})$，可以写成 $\pi\rho b^2 \dfrac{d}{dt}(\dot{h} - ab\dot{\alpha} + V\alpha)$，其中，$\pi\rho b^2$ 为单位展长的机翼周围气流的视在质量，即底面半径为 b 的单位长空气圆柱的

质量。$\frac{d}{dt}(\dot{h}-ab\dot{\alpha}+V\alpha)$为机翼以翼剖面中点的速度作上下平移运动时以及有攻角α时所引起的下洗加速度，该项表示机翼振动时带动空气和它一起振动而产生的惯性反作用力。这些力的合力作用点将通过机翼剖面中点，可用L_1来表示。气动力公式中的第二项，如果暂不考虑$C(k)$的作用，则正好是准定常空气动力理论中的升力表达式，它是由环量产生的升力，其合力通过气动力中心，可用L_2表示。显然，$C(k)$就是考虑了自由涡作用而引起的修正项，这种修正不仅表现在升力大小上，而且由于$C(k)$是复数，因此还表示升力与机翼运动之间存在着相位差。从气动力矩表达式，我们可以看出，它由两部分组成，第一部分有三项，第一项就是由L_1产生的对刚心的力矩，第二项就是在准定常空气动力公式中所说的转动引起的阻尼力矩，第二部分就是由L_2所产生的对刚心的力矩。

那么为什么自由涡对升力项L_2的修正与减缩频率有关系呢？这是因为减缩频率表征着流动随时间变化的特征。我们如何来理解这一点呢？著名的空气动力学家冯·卡门是这样解释的：假定流体以速度V流过振动的机翼表面上某一点处时，受到振动的扰动，受扰动的流体仍将以流动速度V为平均速度向下游流去，机翼振动的圆频率是ω，于是扰动的波长为$\frac{2\pi V}{\omega}$，则比值：

$$\frac{2b}{2\pi V/\omega}=\frac{b\omega}{\pi V}=\frac{1}{\pi}\cdot k \tag{5.21}$$

与减缩频率k成正比，即说明k代表了机翼特征长度$2b$与扰动波长之比，也就是说，k代表了机翼上其它各点感受扰动的程度，由于振动机翼上每一点都扰动着气流，因此，减缩频率k代表了机翼各点处运动之间的相互影响作用。

在实际进行颤振计算时，直接采用气动力表达式（5.17）是不方便的，注意到该公式仅适用于机翼作简谐振动的前提，即$h=h_0e^{i\omega t},\alpha=\alpha_0e^{i\omega t}$，其中，$h_0,\alpha_0$为复振幅，说明两者之间的相位差。将其代入气动力公式（5.17），并且为了使用方便，规定气动力向下为正，整理后得到：

$$L = \pi\rho b^3\omega^2\{L_h \frac{h}{b} + [L_\alpha - (\frac{1}{2}+a)L_h]\alpha\}$$

$$M_E = \pi\rho\, b^4\omega^2\{[M_h - (\frac{1}{2}+a)L_h]\frac{h}{b} + [M_\alpha - (\frac{1}{2}+a)(L_\alpha + M_h) + (\frac{1}{2}+a)^2 L_h]\alpha\} \tag{5.22}$$

其中：

$$L_h = 1 - i\frac{2}{k}[F(k) + iG(k)]$$

$$L_\alpha = \frac{1}{2} - i\frac{1}{k}[1 + 2F(k) + iG(k)] - \frac{2}{k^2}[F(k) + iG(k)]$$

$$M_h = \frac{1}{2} \tag{5.23}$$

$$M_\alpha = \frac{3}{8} - i\frac{1}{k}$$

表 5-1 西奥道生函数表 $C(k) = F(k) + iG(k)$

k	1/k	F	-G
	0.0000	0.5	0
10.00	0.1000	0.5006	0.0124
6.00	0.1667	0.5017	0.0206
4.00	0.2500	0.5037	0.0305
3.00	0.3333	0.5063	0.0400
2.00	0.5000	0.5129	0.0577
1.50	0.6667	0.5210	0.0736
1.20	0.8333	0.5300	0.0877
1.00	1.0000	0.5394	0.1003
0.80	1.2500	0.5541	0.1165
0.66	1.5152	0.5699	0.1308
0.60	1.6667	0.5788	0.1378
0.56	1.7857	0.5857	0.1428
0.50	2.0000	0.5979	0.1507
0.44	2.2727	0.6130	0.1592
0.40	2.5000	0.6250	0.1650

k	1/k	F	-G
0.34	2.9412	0.6469	0.1783
0.30	3.3333	0.6650	0.1793
0.24	4.1667	0.6989	0.1862
0.20	5.0000	0.7276	0.1886
0.16	6.2500	0.7628	0.1876
0.12	8.3333	0.8063	0.1801
0.10	10.0000	0.8320	0.1723
0.08	12.5000	0.8604	0.1604
0.06	16.6667	0.8920	0.1426
0.05	20.0000	0.9090	0.1305
0.04	25.0000	0.9267	0.1160
0.025	40.0000	0.9545	0.0872
0.01	100.0000	0.9824	0.0482
0		1.0000	0

为了计算方便，通常将（5.23）式的 4 个系数制成表格，表 5-2 给出了马赫数 M=0 情况下的气动力系数，更详细的数据可查阅参考文献[2]。这些系数除 M_h 外都是复数，其虚部代表与位移有相位差的那些气动力，它的正负号取决于气动力是激励性质的或是阻尼性质的。

最后应着重指出的是，（5.17）式的非定常气动力只适用于简谐运动，因而严格讲来只能用来计算颤振临界点，而（5.11）式、（5.13）式的准定常气动力则适用于任何运动，所以除用于计算颤振临界点外，还可以用来计算机翼的亚临界颤振响应，当然，从得到的颤振速度的精确性来讲，准定常气动力理论的结果是不如非定常气动力理论的结果的。

表 5-2 不可压缩流中的气动力系数表（M = 0）

k	1/k	L_h	L_α	M_h	M_α
	0.0	1.0000+0.0000i	0.5000+0.000i	0.5	0.375+0.000i
4	0.25	0.9848-0.2519i	0.4218-0.9423i	0.5	0.375-0.2500i
2	0.50	0.9423-0.5129i	0.1858-0.9841i	0.5	0.375-0.500i
1.2	0.83	0.8538-0.8833i	-0.3823-1.5949i	0.5	0.375-0.8333i
0.8	1.25	0.7088-1.3853i	-1.5228-2.2712i	0.5	0.375-1.2500i
0.6	1.67	0.5407-1.9293i	-3.1749-2.8305i	0.5	0.375-1.6667i
0.5	2.00	0.3972-2.3916i	-4.8860-3.1860i	0.5	0.375-2.0000i
0.4	2.50	0.1752-3.1250i	-8.1375-3.5625i	0.5	0.375-2.5000i
0.34	2.94	-0.0221-3.8053i	-11.7140-3.7396i	0.5	0.375-2.9412i

k	1/k	L_h	L_α	M_h	M_α
0.3	3.33	-0.1950-4.4333i	-15.4730-3.7822i	0.5	0.375-3.3333i
0.27	3.75	-0.3798-5.1048i	-20.0337-3.6847i	0.5	0.375-3.7500i
0.24	4.17	-0.5520-5.8242i	-25.3190-3.5260i	0.5	0.375-4.1667i
0.2	5.00	-0.8860-7.2760i	-37.7665-2.8460i	0.5	0.375-5.000i
0.16	6.25	-1.3450-9.5350i	-61.4370-1.1288i	0.5	0.375-6.2500i
0.12	8.33	-2.0020-13.4385i	-114.4920+3.2420i	0.5	0.375-8.3333i
0.1	10.00	-2.4460-16.6400i	-169.3460+7.8200i	0.5	0.375-10.0000i
0.08	12.50	-3.0100-21.5100i	-272.4100+16.1150i	0.5	0.375-12.5000i
0.06	16.67	-3.7530-29.7333i	-499.8530+32.8222i	0.5	0.375-16.6667i

§5.3 应用准定常气动力求解二元机翼的颤振

本节所研究的二元机翼颤振系统如图 5-4 所示，在机翼刚心E点处固定一刚度为K_h的线弹簧及一刚度为K_α的扭转弹簧，刚心E在翼弦中点后ab处，重心到刚心的距离为$x_\alpha b$，机翼弦长为$2b$。二元机翼有两个自由度，即随刚心E的上下平移运动h（向下为正）和绕刚心E的俯仰转动α（以使机翼前缘抬头为正)，于是，机翼上任一点的位移可表为：

$$z = h + r\alpha \qquad (5.24)$$

其中，r为从刚心E向后量起的距离（即对在刚心后面的点，r为正)。

现引用拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,2,3,\cdots n) \qquad (5.25)$$

来建立机翼的颤振运动方程。

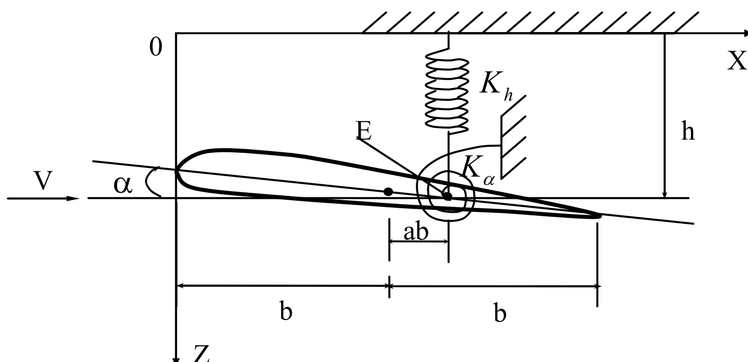


图 5-4　二元机翼颤振系统

（5.25）式中，T表示系统的动能，U表示系统的势能，Q_i表示与q_i相应的广义力，

它由虚功表达式$\delta W=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i$给出。

二元机翼的动能可写为：

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{2b}(\dot{h}+r\dot{\alpha})^2dm \\ =\frac{1}{2}m\dot{h}^2+S_\alpha\dot{h}\dot{\alpha}+\frac{1}{2}I_\alpha\dot{\alpha}^2 \tag{5.26}$$

其中，$m=\int_0^{2b}dm$为单位展长的机翼质量，

$S_\alpha=\int_0^{2b}rdm=mx_\alpha b$为单位展长机翼对刚心$E$的质量静矩。$x_\alpha$为重心在刚心之后的无量纲距离。

$I_\alpha=\int_0^{2b}r^2dm=mr_\alpha^2b^2$为（单位展长）机翼对刚心$E$的质量惯性矩，$r_\alpha$为机翼对刚心的无量纲回转半径。

机翼的势能为

$$U=\frac{1}{2}K_hh^2+\frac{1}{2}K_\alpha\alpha^2 \tag{5.27}$$

代入拉格朗日方程可得到二元机翼的颤振方程式：

$$\begin{cases} m\ddot{h}+S_\alpha\ddot{\alpha}+K_hh=Q_h \\ S_\alpha\ddot{h}+I_\alpha\ddot{\alpha}+K_\alpha\alpha=Q_\alpha \end{cases} \tag{5.28}$$

其中，Q_h,Q_α分别代表对应于h和α的广义气动力，即机翼振动引起的气动力（向下为正）和气动力矩（使机翼抬头为正）。

引入准定常气动力公式：

$$\begin{aligned} Q_h &=-L=-2\pi\rho V^2b[\alpha+\frac{\dot{h}}{V}+(\frac{1}{2}-a)b\frac{\dot{\alpha}}{V}] \\ Q_\alpha &=M_E=4\pi\rho V^2b^2(\frac{1+a}{2}-\frac{1}{4})[\alpha+\frac{\dot{h}}{V}+(\frac{1}{2}-a)b\frac{\dot{\alpha}}{V}]-\frac{1}{2}\pi\rho Vb^3\dot{\alpha} \end{aligned} \tag{5.29}$$

由方程（5.29）我们知道，方程（5.28）是一个关于h,α的二阶齐次微分方程组，对于任意给定的风速V，可求得形如$h=h_0e^{pt},\alpha=\alpha_0e^{pt}$的解。将它们代入方程，可得到关于未知量$h_0,\alpha_0$的齐次联立代数方程组，根据$h_0,\alpha_0$有非零解的充要条件，其系数行列式的值

应等于零，从而得到颤振系统的特征方程式，由它可确定未知量 p。我们已经知道，当 $V < V_F$ 时，机翼振动是衰减的，因此，其特征方程的根都是带有负实部的复数； 当 $V > V_F$ 时，机翼运动是发散的，特征方程至少有一个特征根的实部大于零；在 $V = V_F$ 时，机翼处于临界颤振状态，其运动是等幅简谐振动，从而其特征根均为纯虚数。如果我们取不同的风速 V，按照上述方法，求解二元机翼颤振系统的特征方程，随着 V 的逐渐增大，原则上总可以找到一个风速，在此风速下，二元机翼颤振系统总有一个特征根实部为零，即 $p = i\omega$。这时的风速 V 就是要求解的颤振临界速度 V_F。

上面所述求解 V_F 的方法过于烦琐而费时，为了直接求出 V_F，实际上我们可以采用下面的方法。注意到在颤振临界状态下，机翼作简谐运动这一事实，即：

$$h = h_0 e^{i\omega t}, \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t} \tag{5.30}$$

将方程（5.29）和（5.30）代入方程（5.28）中，则这时方程中的速度（即要求解的 V_F）成为未知量，从而使得到的齐次方程组共有四个未知量 h_0, α_0, V, ω，由 h_0, α_0 的系数行列式为零这一条件得到的特征方程还会有 V, ω 两个未知量，似乎难以求解，但由于特征方程式的系数是显含虚数单位 i 的复数，整个方程可以分成实部与虚部两部分，并且我们已知方程的实部与虚部都应该是实数，从而要使特征方程式为零，必须是它的实部方程与虚部方程同时为零。也就是说，按上述步骤得到的特征方程实际上是两个方程式，正好用来求解两个未知数 V, ω。

将方程（5.29）和（5.30）代入方程（5.28）后，得到：

$$\begin{aligned}
&(K_h - m\omega^2 + i2\pi\rho V b\omega)h_0 + \{-S_\alpha\omega^2 + 2\pi\rho V^2 b[1 + i\omega(\frac{1}{2} - a)\frac{b}{V}]\}\alpha_0 = 0 \\
&[-S_\alpha\omega^2 + i4\pi\rho V b^2(\frac{1}{4} - \frac{1+a}{2})\omega]h_0 + \{K_\alpha - I_\alpha\omega^2 + 2\rho V^2 b^2[i\frac{b\pi}{4V}\omega \\
&\qquad + 2\pi(\frac{1}{4} - \frac{1+a}{2})[1 + i\omega(\frac{1}{2} - a)\frac{b}{V}]]\}\alpha_0 = 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

为了使方程式简洁，引入下列符号：

$$\begin{aligned}
&a_0 = 2\pi, c_{11} = m, c_{12} = c_{21} = -S_\alpha, c_{22} = I_\alpha, \\
&a_{11} = K_h, a_{22} = K_\alpha, b_{12} = -\rho b a_0, b_{22} = 2\rho b^2 a_0(\frac{1}{4} - \frac{1+a}{2}) \\
&d_{11} = \rho b a_0, d_{12} = -\rho b^2 a_0(\frac{1}{2} - a), d_{21} = 2\rho b^2 a_0(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4}) \\
&d_{22} = 2\rho b^3[\frac{\pi}{4} - (\frac{1+a}{2} - \frac{1}{4})a_0(\frac{1}{2} - a)]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

则（5.31）式可以写为：

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}-c_{11}\omega^2+i\omega Vd_{11})h_0+(c_{12}\omega^2-b_{12}V^2-i\omega Vd_{12})\alpha_0=0\\
&(c_{21}\omega^2-i\omega Vd_{21})h_0+(a_{22}-c_{22}\omega^2+b_{22}V^2+i\omega Vd_{22})\alpha_0=0
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

上面以 h_0, α_0 为未知量的联立齐次代数方程有非零解的条件是其系数行列式等于零，即：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-c_{11}\omega^2+i\omega Vd_{11} & c_{12}\omega^2-b_{12}V^2-i\omega Vd_{12}\\
c_{12}\omega^2-i\omega Vd_{12} & a_{22}-c_{22}\omega^2+b_{22}V^2+i\omega Vd_{22}
\end{vmatrix}=0
\tag{5.34}
$$

这个行列式就是上面所提到的“颤振行列式”，与自由振动时的固有频率方程不同，它是一个复系数方程，实际上含有实部与虚部两个方程，并有两个未知量 V, ω。将其展开并分成实部方程与虚部方程，得：

$$
\begin{aligned}
&A_1\omega^4-(C_1+C_2V^2)\omega^2+(E_1+E_2V^2)=0\\
&-B_1\omega^2+(D_1+D_2V^2)=0
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
&A_1=c_{11}c_{22}-c_{21}c_{12}\\
&B_1=d_{11}c_{22}+c_{11}d_{22}-c_{12}d_{21}-c_{21}d_{12}\\
&C_1=a_{11}c_{22}+c_{11}a_{22}\\
&C_2=c_{11}b_{22}-b_{12}c_{21}+d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}\\
&D_1=d_{11}a_{22}+a_{11}d_{22}\\
&D_2=d_{11}b_{22}-b_{12}d_{21}\\
&E_1=a_{11}a_{22}\\
&E_2=a_{11}b_{22}
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

由虚部方程得：

$$
\omega^2=(D_1+D_2V^2)/B_1 \tag{5.37}
$$

代入实部方程得：

$$
\overline{L}V^4+\overline{M}V^2+\overline{N}=0 \tag{5.38}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\overline{L} &= D_2(B_1C_2 - D_2A_1) \\
\overline{M} &= B_1C_2D_1 + B_1C_1D_2 - {B_1}^2E_2 - 2D_1D_2A_1 \\
\overline{N} &= B_1C_1D_1 - {B_1}^2E_1 - {D_1}^2A_1
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

从而可解得：

$$
V^2 = \frac{(-\overline{M} \pm \sqrt{\overline{M}^2 - 4\overline{L}\overline{N}})}{2\overline{L}}
\tag{5.40}
$$

两个根中较小的正根V，即是颤振临界速度V_F，将V_F代回到方程（5.37），即可解得颤振频率ω_F。求得V_F, ω_F后，则可得到颤振模态：

$$
\frac{h_0}{\alpha_0} = -\frac{c_{12}\omega_F^2 - b_{12}V_F^2 - i\omega_F V_F d_{12}}{a_{11} - c_{11}\omega_F^2 + i\omega_F V_F d_{21}}
\tag{5.41}
$$

上式的计算结果是一个复数，说明颤振时，h与α自由度的运动有相位差，这一点与机翼的固有振动是不同的。

由于准定常气动力理论不限于机翼作简谐振动情况，所以还可以用它来分析速度低于颤振临界速度时的亚临界情况以及速度高于临界速度时的超临界情况下机翼的运动,这时可令：

$$
h = h_0 e^{\lambda t}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}
\tag{5.42}
$$

代入（5.28）式，按关于h_0, α_0的齐次代数方程有非零解的条件，即h_0, α_0的系数行列式为零，可得到特征方程：

$$
A_0\lambda^4 + B_0\lambda^3 + C_0\lambda^2 + D_0\lambda + E_0 = 0
\tag{5.43}
$$

其中

$$
A_0 = A_1, B_0 = B_2V, C_0 = C_1 + C_2V^2, D_0 = D_1V + D_2V^3, E_0 = E_1 + E_2V^2
\tag{5.44}
$$

现在V是已知的，$A_1, B_1, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$也已经在式(5.36)中给出，从而(5.43)式中的各项系数在V给定后都是已知的。由该特征方程可以解出四个λ值，若特征方程所有根的实部为负的，则机翼的振动是衰减的，即运动是稳定的；若某个根有正的实部，则振动发散，运动是不稳定的，也就是说，此时速度已超过了机翼的颤振临界速度。

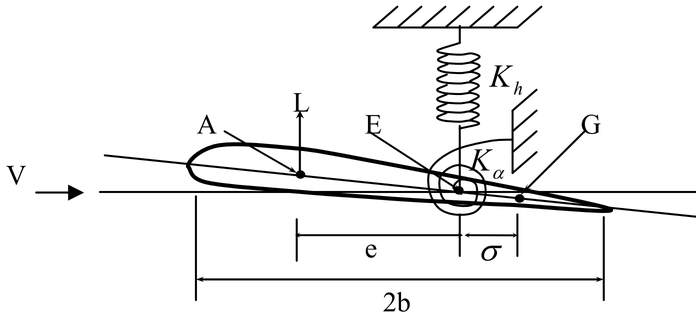


图 5-5　二元机翼

[例题] 如图 5-5 所示二元机翼，已知其参数为

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}=2\pi,\ \frac{m}{\pi\rho b^2}=5,\ \frac{S_\alpha}{mb}=0.25,\ \frac{I_\alpha}{mb^2}=0.5,\ \frac{e}{b}=0.4,\ (\frac{\omega_h}{\omega_\alpha})=0.5,\ \omega_\alpha=50rad/s,\ b=1(m)，$$

试采用简化的准定常气动力 $L=\frac{1}{2}\rho V^2(2b)\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha+\frac{\dot{h}}{V}),\quad M_E=L\cdot e$（$L$ 向上为正，M_E 抬头为正），估算该机翼的颤振临界速度。

[解] 将所给准定常气动力公式代入方程（5.28）中，得机翼颤振运动方程为：

$$\begin{cases} m\ddot{h}+S_\alpha\ddot{\alpha}+K_h h+\frac{1}{2}\rho V^2(2b)\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha+\frac{\dot{h}}{V})=0 \\ S_\alpha\ddot{h}+I_\alpha\ddot{\alpha}+K_\alpha\alpha-\frac{1}{2}\rho V^2(2b)\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha+\frac{\dot{h}}{V})e=0 \end{cases}$$

在临界颤振状态下，有：

$$h=h_0e^{i\omega t},\quad \alpha=\alpha_0e^{i\omega t}$$

代入上方程并写成无量纲形式：

$$\begin{cases} -\omega^2\frac{h_0}{b}-\omega^2\frac{S_\alpha}{mb}\alpha_0+\frac{K_h}{m}\frac{h_0}{b}+\frac{\pi\rho b^2}{m}\cdot 2(\frac{V}{b})^2\alpha_0+i\omega\frac{2\pi\rho b^2}{m}\frac{V}{b}\frac{h_0}{b}=0 \\ -\omega^2\frac{S_\alpha}{mb}\frac{h_0}{b}-\omega^2\frac{I_\alpha}{mb^2}\alpha_0+\frac{K_\alpha}{mb^2}\alpha_0-\frac{\pi\rho b^2}{m}\cdot(\frac{V}{b})^2\frac{2e}{b}\alpha_0-i\omega\frac{2\pi\rho b^2}{m}\frac{V}{b}\frac{e}{b}\frac{h_0}{b}=0 \end{cases}$$

代入已知数据，并记 $X=\frac{V}{b\omega_\alpha},u=\frac{\omega}{\omega_\alpha}$，将方程写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} -u^2+0.25+i0.4uX & -0.25u^2+0.4X^2 \\ -0.25u^2-i0.16uX & 0.5-0.5u^2-0.16X^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h_0/b \\ \alpha_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

该方程的特征方程可以分为实部与虚部两个方程。其实部方程为：

$$0.4375u^4-(0.625-0.26X^2)u^2+(0.125-0.04X^2)=0$$

虚部方程为：

$$0.2-0.24u^2=0$$

从而解得颤振频率：

$\omega_F = u \cdot \omega_\alpha = 0.9128 \times 50 = 45.64 rad/s$

代入实部方程解得颤振临界速度为：

$V_F = X_F \cdot b\omega_\alpha = 0.722 \times 1 \times 50 = 36.08(m/s)$

如果在本例中，使用格罗斯曼准定常气动力公式来计算颤振临界速度，除了公式更复杂一些外，计算求解的步骤是完全一样的。

§5.4 应用非定常气动力理论求解二元机翼颤振

由于非定常气动力理论只适用于机翼作简谐振动的情况，故只能用非定常气动力公式（5.22）来求解二元机翼的颤振临界速度，所以在应用非定常气动力公式时，隐含了机翼作简谐运动的前提，即 $h = h_0 e^{i\omega t}, \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$。将非定常气动力公式（5.22）代入方程（5.28）中，得到二元机翼颤振运动方程为：

$$
\begin{aligned}
&-m\omega^2 h - S_\alpha \omega^2 \alpha + K_h h - \pi\rho b^3 \omega^2 \{L_h \frac{h}{b} + [L_\alpha - (\frac{1}{2}+a)L_h]\alpha\} = 0 \\
&-S_\alpha \omega^2 h - I_\alpha \omega^2 \alpha + K_\alpha \alpha - \pi\rho b^4 \omega^2 \{[M_h - (\frac{1}{2}+a)L_h]\frac{h}{b} \\
&\qquad + [M_\alpha - (\frac{1}{2}+a)(L_\alpha + M_h) + (\frac{1}{2}+a)^2 L_h]\alpha\} = 0
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

同样引入机翼的“部份频率”：$\omega_h = \sqrt{\dfrac{K_h}{m}}, \omega_\alpha = \sqrt{\dfrac{K_\alpha}{I_\alpha}}$，将它们代入到上方程中，并将第一个方程除以 $-\pi\rho b^3\omega^2$，第二个方程除以 $-\pi\rho b^4\omega^2$，则可得：

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{m}{\pi\rho b^2}(1-\frac{\omega_h^2}{\omega^2}) + L_h\right](\frac{h}{b}) + \left\{\frac{m}{\pi\rho b^2}x_\alpha + \left[L_\alpha - (\frac{1}{2}+a)L_h\right]\right\}\alpha = 0 \\
&\left\{\frac{m}{\pi\rho b^2}x_\alpha + \left[M_h - (\frac{1}{2}+a)L_h\right]\right\}(\frac{h}{b}) + \\
&\left\{\frac{m}{\pi\rho b^2}r_\alpha^2(1-\frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}) + \left[M_\alpha - (\frac{1}{2}+a)(L_\alpha + M_h) + (\frac{1}{2}+a)^2 L_h\right]\right\}\alpha = 0
\end{aligned} \tag{5.46}
$$

其中，$\dfrac{\mathrm{m}}{\pi\rho \mathrm{b}^2} = \mu$ 代表机翼质量的无量纲量，$\mathrm{a}, \mathrm{x}_\alpha, \mathrm{r}_\alpha$ 等符号的意义已在上一节给出。

由 h, α 有非零解的条件可得颤振行列式为：

$$\begin{vmatrix} \mu(1-\frac{\omega_h^2}{\omega^2})+L_h & \mu x_\alpha+[L_\alpha-(\frac{1}{2}+a)L_h] \\ \mu x_\alpha+[M_h-(\frac{1}{2}+a)L_h] & \mu r_\alpha^2(1-\frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2})+[M_\alpha-(\frac{1}{2}+a)(L_\alpha+M_h)+(\frac{1}{2}+a)^2 L_h \end{vmatrix}=0 \quad (5.47)$$

上式中含有两个未知数 ω, k，其中减缩频率 k 隐含在 L_h, L_α 等气动系数中，从而所要求解的颤振速度 V_F 也通过 $k_F=\frac{\omega_F b}{V_F}$ 隐含在 L_h, L_α 等气动系数中。由此我们知道，即使建立了颤振行列式，并像用准定常气动力理论求解颤振速度时那样，将其分成实部和虚部方程进行求解，也不能直接解得颤振临界速度。因为上述方程表面上看只有一个未知量 ω，另一个未知量 k 或 V 却隐含在各个气动系数中，而 k 与各气动系数间的关系通常是用表格形式给出的，因此，颤振行列式只有用某种特殊的试凑方法才能解得。下面介绍三种常用的解法。

一、西奥道生方法

该方法是西奥道生提出的，该方法的思路仍然是先将颤振行列式展开成复系数代数方程，然后令方程的实部与虚部分别等于零进行求解，从而得到颤振临界速度，但其中需要一个试凑的过程。其具体求解过程如下：

在方程（5.47）中，令 $(\frac{\omega_\alpha}{\omega})^2 \equiv X$，则 $(\frac{\omega_h}{\omega})^2=(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha})^2 X$，则方程（5.47）中只有对角项含有 X，对于给定的 k 值，行列式的所有项的系数都是已知的。

将（5.47）展开后可得：

$$C_1 X^2+C_2 X+C_3=0 \quad (5.48)$$

其中，$C_1=\mu^2 r_\alpha^2(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha})^2$ 是实数，而 C_2, C_3 因为含有系数 L_h, L_α 等则是复数，设 $C_2=R_2+iI_2$，$C_3=R_3+iI_3$，则方程（5.48）可按实部、虚部分开。令它们分别等于零而得到两个联立的，以 X 为未知量的实系数代数方程：

$$\begin{cases} C_1 X^2+R_2 X+R_3=0 \\ I_2 X+I_3=0 \end{cases} \quad (5.49)$$

由于 R_2, I_2 等只有在给定 k 值时，才能通过查表算出其具体数值，所以此方程可以看成

是关于X,k两个未知量的联立方程。

分别求解实部与虚部方程，并分别记实部、虚部方程的根为X_R, X_I，通常$X_R \neq X_I$，显然只有在$X_R = X_I$时，由此得到的才是方程（5.48）的解。一般这可由图解法来得到，即把实部、虚部方程看作是两条曲线的隐函数表示式：

$$\begin{aligned} R(X,k) &= 0 \\ I(X,k) &= 0 \end{aligned} \tag{5.50}$$

给出一组k值，算出两组(X,k)点，画出两条曲线，由交点即可得到所求的X和k值，从而得到V_F, ω_F。

具体的步骤是，给定一个k值（通常以$1/k$形式给出），查表（通常还要插值）得到L_h, L_α等系数的具体数值，然后算出$\mathrm{R}_2, \mathrm{I}_2$等系数，由实部方程得到两个实数根，由虚部方程得到一个虚部根。选取一系列k值，如此解出一系列的实部根和虚部根，就可作出两条$X_R \sim k$曲线（或$X_R \sim 1/k$曲线）和一条$X_I \sim k$曲线（或$X_I \sim 1/k$曲线），实、虚部解曲线交点的k轴坐标值就是k_F，X轴坐标值就是X_F，根据$\omega_F = \dfrac{\omega_\alpha}{\sqrt{X_F}}$和$V_F = \dfrac{\omega_F b}{k_F}$就可得到颤振临界速度和频率。

当然在进行求解时，也可以不作图，而直接按照误差控制条件：在同一k值下，$\left|X_R - X_I\right| < \varepsilon$来求解$k_F$和$X_F$。

[例] 已知二元机翼的基本参数如下：

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2} = 30, x_\alpha = 0.2, r_\alpha^2 = 0.3, (\frac{\omega_h}{\omega_\alpha})^2 = 0.1, a = 0, \omega_\alpha = 50 rad/s, b = 1(m)$$

试用非定常气动力公式和西奥道生方法，求解其颤振临界速度和频率。

[解]：将上述参数代入（5.39）式，并设$(\dfrac{\omega_\alpha}{\omega})^2 \equiv X$，可得：

$$\begin{vmatrix} 30(1-0.1X) + L_h & 6 + L_\alpha - 0.5L_h \\ 6 + M_h - 0.5L_h & 9(1-X) + M_\alpha - 0.5(L_\alpha + M_h) + 0.25L_h \end{vmatrix} = 0$$

现取三个$1/k$值，分别为 3.33，3.75，4.17，来进行求解。对每一个$1/k$值，查气动系数表得$L_h, L_\alpha, M_h, M_\alpha$的值，代入上式，展开后分成实部方程和虚部方程，将计算求根的结

果列表如下：

$1/k$	3.33	3.75	4.17
C_1	27	27	27
R_2	-318.71	-323.73	-329.98
R_3	549.9	640.12	744
I_2	47.52	55.53	63.69
I_3	-118.91	-147.63	-180.13
X_{R1}	9.705	9.493	9.239
X_{R2}	2.098	2.497	2.983
X_I	2.502	2.659	2.816

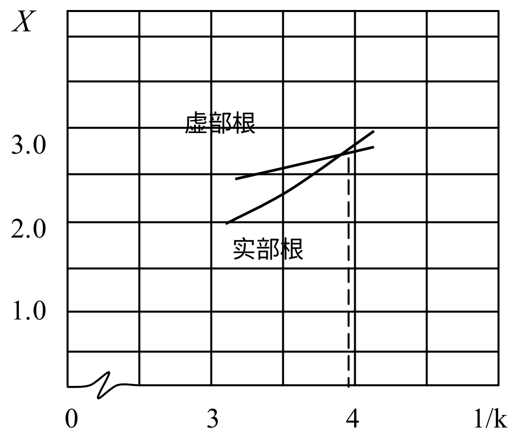


图 5-6　X 随减缩频率变化曲线

图 5-6 画出了 X_{R2}、X_I 随 $1/k$ 变化的曲线，交点处的坐标值给出 $1/k_F = 3.9$，$X_F = 2.601$，从而得到：

$$\omega_F = \frac{\omega_\alpha}{\sqrt{X_F}} = 0.62 \times 50 = 31 rad/s$$

$$V_F = \frac{\omega_F b}{k_F} = 2.418 \times 50 \times 1 = 120.9 m/s$$

二、*V-g* 法

V-g 法是目前颤振计算中最常用的方法之一，它是由于在求解过程中，引入了结构阻尼系数 g 而得名。实验表明，振动时结构阻尼力的大小与振动位移量成正比（因而也和弹性恢复力成正比），而与振动频率无关，此外，它和速度反相，即与位移有 90°相位差。通常用结构阻尼系数 g 来表示结构阻尼水平，由此，h, α 两自由度上的结构阻尼力可分别表示为

$-ig_hK_hh$和$-ig_\alpha K_\alpha\alpha$，结构阻尼力与弹性恢复力之和可以表示为：

$$\begin{aligned}&-ig_hK_hh-K_hh=-(1+ig_h)K_hh\\&-ig_\alpha K_\alpha\alpha-K_\alpha\alpha=-(1+ig_\alpha)K_\alpha\alpha\end{aligned}\qquad(5.51)$$

通常取$g_h=g_\alpha=g$，引入结构阻尼后，机翼的颤振运动方程为：

$$\begin{aligned}&m\ddot{h}+S_\alpha\ddot{\alpha}+K_hh+igK_hh=Q_h\\&S_\alpha\ddot{h}+I_\alpha\ddot{\alpha}+K_\alpha\alpha+igK_\alpha\alpha=Q_\alpha\end{aligned}\qquad(5.52)$$

即：

$$\begin{aligned}&m\ddot{h}+S_\alpha\ddot{\alpha}+(1+ig)K_hh=Q_h\\&S_\alpha\ddot{h}+I_\alpha\ddot{\alpha}+(1+ig)K_\alpha\alpha=Q_\alpha\end{aligned}\qquad(5.53)$$

与无阻尼情况的（5.28）相比，它只是在结构刚度项上前乘了一个复数$(1+ig)$，故可以依照前节的结果相应地写出其无量纲化后的颤振行列式为：

$$\begin{vmatrix}\mu[1-(1+ig)(\frac{\omega_\alpha}{\omega})^2(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha})^2]+L_h & \mu x_\alpha+[L_\alpha-(\frac{1}{2}+a)L_h]\\ \mu x_\alpha+[M_h-(\frac{1}{2}+a)L_h] & \mu r_\alpha^2[1-(1+ig)(\frac{\omega_\alpha}{\omega})^2]+[M_\alpha-(\frac{1}{2}+a)(L_\alpha+M_h)+(\frac{1}{2}+a)^2L_h]\end{vmatrix}=0\qquad(5.54)$$

它与（5.47）式的差别仅在于以$(1+ig)(\frac{\omega_\alpha}{\omega})^2$代替了$(\frac{\omega_\alpha}{\omega})^2$，现在令$(1+ig)(\frac{\omega_\alpha}{\omega})^2=z$，

则上式展开后可得关于z的二次代数方程式：

$$C_1z^2+C_2z+C_3=0\qquad(5.55)$$

值得注意的是，由于z是一个复未知数，故上面的复系数方程不能再分成实部方程和虚部方程来求解，而需要直接用求解二次方程复根的方法求出两个根z_1和z_2，然后根据$z\,(=z_R+iz_I)$的定义，得到：

$$\omega=\frac{\omega_\alpha}{\sqrt{z_R}},\quad g=\frac{z_I}{z_R}\qquad(5.56)$$

颤振行列式（5.54）要在事先取定某一个k值的情况下，才能计算出各项系数，进而解出其根z，在求得ω值后，就有：

$$V=\frac{1}{k}\omega b=\frac{b}{k}\cdot\frac{\omega_\alpha}{\sqrt{z_R}}\qquad(5.57)$$

由（5.56）式还可计算出结构阻尼系数g，但这不一定就是所计算的机翼真实的结构阻

尼水平，因此，我们需要再回过头来，把引入了结构阻尼系数 g 以后，要求解的问题再考察一下。

在简谐振动情况下，由（5.53）式导出的颤振行列式（5.54）中的未知量共有三个：ω, V（隐含在 k 中）以及引入的结构阻尼系数 g，而原来与之对应的（5.47）式则只能解出两个未知量，可见还必须补充一个条件才能解（5.54）式，对此有两种情况：

（1）实验测定机翼结构的真实结构阻尼水平，即 g 为已知，这时就不必用 z 作为未知数，而仍用 $X = (\frac{\omega_\alpha}{\omega})^2$ 为未知数，采用西奥道生方法求解，算出在这样的阻尼水平下机翼的颤振速度，但实验测定真实机翼的 g 值很难做到，而且西奥道生方法求解也较繁，一般不采用。

（2）设结构阻尼系数 g 为未知，而选取某一个风速 V，且将要求解的问题换成下面一种等效的提法：在 V 这样一个速度下，欲维持机翼的振动为简谐振动，该机翼需要具有多大的阻尼水平。如果所需要的阻尼是正的 $(g > 0)$，那就说明无阻尼的机翼在这个风速下的自由振动必是发散的；反之，若需要的阻尼是负的 $(g < 0)$，即机翼实际上需要有一个激励才能维持等幅简谐振动，可知无阻尼的机翼在这个风速下的自由振动必是衰减的。总之，现在（5.54）式中只剩下两个未知量 ω 及 g，可以按常规办法来求解。

其实，上面所说的选取某一风速 V，然后求解，是便于物理解释，实际上，应注意到在（5.54）式中并没有明显地出现 V，只是 L_h, L_α 等是 k 的超越函数，而 k 中包含有 V，因此所说的选取某一风速 V，在实际计算中只能是选取某一个 k，然后在解出 ω 后，根据 $V = \frac{1}{k}\omega b$ 来求出该风速。

事实上，机翼结构总是存在一定的阻尼，但是很难精确测定，所以认为机翼的结构阻尼为零，是一种偏于安全的保守考虑，取 $g = 0$ 得到的颤振临界速度对真实机翼来说是一个保守解。假如由（5.56）式算出的 g 值是负的（比假设的零值要小），就表示要对机翼施加负的阻尼力（就是激励力），才能使机翼作等幅简谐振动，实际上，机翼未受此激励，故机翼尚未达到临界颤振状况，振动是衰减的，即由（5.54）式解出的速度 V 比真实颤振速度 V_F 要小。

计算颤振速度时，要选取一系列的 k 值，重复上述计算过程，得到一系列在某一风速下，为维持简谐振动所需要具有的结构阻尼 g 及相应的 ω，然后绘制出 $V-g$ 曲线及 $V-\omega$ 曲线，通常取 $g = 0$（由 $V-g$ 曲线与 V 轴的交点或数值插值确定）所对应的 V 值作为颤振临界速度 V_F，并由 $V-\omega$ 曲线确定对应的 ω_F，如图 5-7 所示。一般在图 5-7（a）中，两条曲线所对应的频率 ω 分别接近 ω_h 和 ω_α，故有时分别称之为弯曲分支及扭转分支（该两个分支对应的振型也是分别由弯曲振型与扭转振型演变而来），但要注意的是，这只是习惯上的叫法，实际上在一个颤振模态中，弯曲与扭转成分的比例是复杂的。从 $V-\omega$ 曲线可以看到，当 V 增加时，两个分支频率亦逐渐靠近，正如频率重合理论所指出的，通常在接近颤振速度时都有类似现象。

在求出了 V_F, ω_F 后，可由（5.54）式计算出颤振模态，即：

$$\frac{h_0/b}{\alpha_0}=-\frac{\mu x_\alpha+[L_\alpha-(\frac{1}{2}+a)L_h]}{\mu[1-(\frac{\omega_h}{\omega_a})^2(\frac{\omega_\alpha}{\omega_F})^2]+L_h} \tag{5.58}$$

其中的 L_h, L_α 等系数均按 $k_F=\frac{\omega_F b}{V_F}$ 的值查表得到。显然，颤振模态是一个复模态。

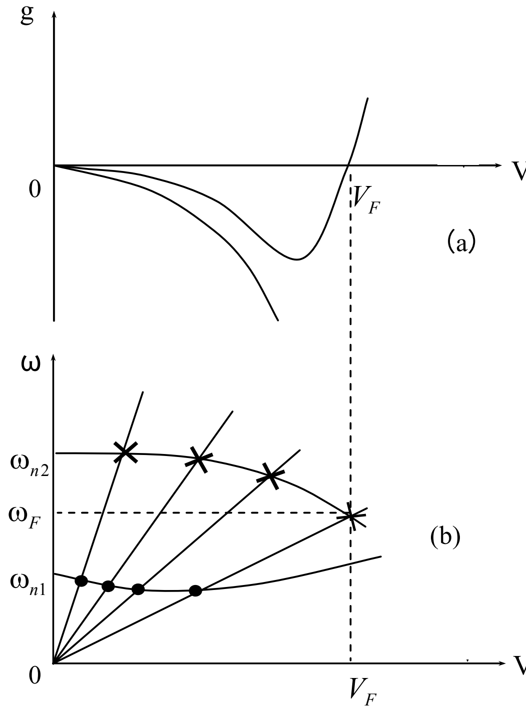


图 5-7 颤振计算的 v－g 曲线和 v－ω 曲线

$V-g$ 法用在二元机翼这样的两个自由度系统上并不见得比西奥道生方法简单，但在工程颤振分析中处理多自由度颤振系统时，由于它可以在数学上把颤振问题归结为求解复特征值问题而获得广泛应用。实际上颤振行列式（5.54）的求解可以化为如下的广义矩阵特征值问题：

$$[A]\{q\}=z[B]\{q\} \tag{5.59}$$

其中，

$$[A]=\begin{bmatrix}\mu+L_h & \mu x_\alpha+[L_\alpha-(\frac{1}{2}+a)L_h] \\ \mu x_\alpha+[M_h-(\frac{1}{2}+a)L_h] & \mu r_\alpha^2+[M_\alpha-(\frac{1}{2}+a)(L_\alpha+M_h)+(\frac{1}{2}+a)^2L_h]\end{bmatrix}$$ 为复数矩阵，

$[B]=\begin{bmatrix}\mu(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha})^2 & 0\\ 0 & \mu r_\alpha^2\end{bmatrix}$为实数矩阵，$\{q\}=\begin{Bmatrix}(\frac{h}{b})\\ \alpha\end{Bmatrix}$为位移列阵，（5.59）式也可以化为标准复特征值问题：

$$[D]\{q\}=z\{q\} \tag{5.60}$$

其中，$[D]=[B]^{-1}[A]$也是复矩阵。应用标准特征值求解程序可以很方便地求解出系统的所有特征根 z。

$V-g$ 法的另一个优点是，由$V-g$ 法得到的$V-g$ 曲线，在颤振临界点V_F 附近的曲线斜率大致反映了机翼发生颤振时的剧烈程度，相对地讲，如果在颤振临界点V_F 附近，$\frac{dg}{dV_F}$值比较大，即$V-g$ 曲线在V_F 点附近的一段上升很陡，则说明机翼发生的颤振将是突发性的烈性颤振，即使给机翼结构增加一点阻尼，也不会使颤振临界速度有明显的增加。相反，如果$\frac{dg}{dV_F}$值较小，$V-g$ 曲线在V_F 点附近的一段上升很缓，曲线较平坦，则颤振将是缓发性的温和型颤振，给机翼结构增加一点阻尼，就会使机翼的颤振临界速度有较大的增加。这两种类型颤振的$V-g$ 曲线如图 5-8 所示。

其次，$V-g$ 曲线上任一点都具有明确的物理意义。例如，图 5-8 (a) 中的$P(V_P,g_P)$点，其物理意义是，如果机翼要在速度V_P 下以频率ω_P（$V-\omega$ 曲线上对应的$P'(\omega_P,V_P)$点的纵坐标）作简谐等幅振动，则需要使机翼具有 g_P 这样大的结构阻尼值，如果机翼的真实结构阻尼值小于此值，则必须给它再增加一些阻尼才能维持机翼的简谐振动，那么可以推论，机翼实际上在V_P 这个速度下是作发散振动的，即已经发生颤振。反之，若机翼真实的结构阻尼值大于此值，则必须减小机翼的阻尼或对机翼施加激励，才能维持机翼的简谐振动，那么实际上机翼在速度V_P 下是作衰减振动而处于亚临界状态。

需要再次强调的是，所谓突发性颤振和缓发性颤振是相对而言的，这样区分的用意仅是为工程上进行颤振排除设计或颤振抑制设计提供一个参考，任何形式的颤振都是破坏性的，在飞机设计包线以内都不允许任何颤振的发生。

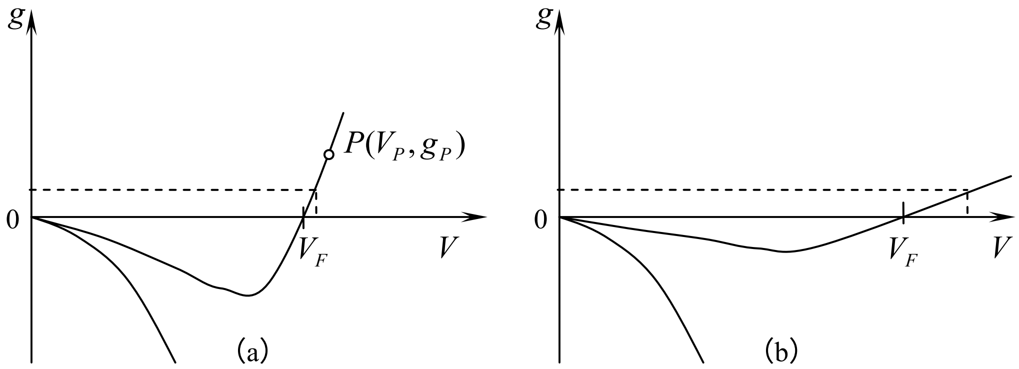


图 5-8 两种不同类型的 V-g 曲线

下面把 $V-g$ 法求解颤振速度的具体步骤归纳如下：

（1）选取一个 k 值，查表得到相应的 L_h、L_α 等系数的值，代入（5.54）式，此时式中只有一个未知数 ω，令 $z \equiv (1+ig)\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2$。则（5.54）式成为一个关于 z 的方程式。

（2）展开（5.54）式，得到一个关于 z 的二次代数方程式并求出它的两个复根 z_1, z_2，或者将（5.44）式化为特征值问题，解出其两个复特征值 z_1, z_2。

（3）由每一个 z_i $(i=1,2)$，按定义求出相应的 g, ω 值：

$$\omega_1 = \frac{\omega_\alpha}{\sqrt{\mathrm{Re}(z_1)}} \qquad \omega_2 = \frac{\omega_\alpha}{\sqrt{\mathrm{Re}(z_2)}}$$

$$g_1 = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_1)} \qquad g_2 = \frac{\mathrm{Im}(z_2)}{\mathrm{Re}(z_2)}$$

再根据（1）中所取的 k 值，求出 $V_1 = \frac{\omega_1 b}{k}$，$V_2 = \frac{\omega_2 b}{k}$

（4）再选取另一个 k 值，重复（1）—（3）的步骤，可以解得另外两组 (V, g, ω) 值。如此选取一系列 k 值，可解得若干组 (V, g, ω) 值，通常列表如下所示：

k	V	g	ω
k_1	V_1	g_1	ω_1
	V_2	g_2	ω_2
k_2	V_1	g_1	ω_1
	V_2	g_2	ω_2
⋮	⋮	⋮	⋮

（5）由上表中各组(V, g, ω)值，画出$V-g$曲线、$V-\omega$曲线，注意在$V-\omega$曲线中对应于同一个 k 值解得的两个点$(V_1, \omega_1), (V_2, \omega_2)$应在同一条射线上，在$V-g$图中，若有一分支曲线与横轴（V 轴）相交，即$g$经过零点由负值变为正值，则交点的速度值就是所求的颤振临界速度值V_F，对应在$V-\omega$曲线上可以确定ω_F的值。

在实际计算中，上述表格不一定要列出，画$V-g$曲线，寻找颤振临界点的工作可以由计算机来自动完成，但在进行实际机翼的多自由度颤振问题计算中，自动画$V-g$曲线和寻找颤振临界点时（即由解得的数据点连成曲线时），必须注意颤振模态的跟踪识别问题（即应该将同一模态分支的点相连）。

三、$p-k$法

在前一节中已经介绍过，若用准定常气动力理论来计算气动力，则由于该理论不限制机翼的运动形式，故可以用来分析速度低于颤振速度的亚临界情况。而西奥道生非定常气动力理论则仅限于机翼作简谐振动的情况，故只能用来求解机翼的颤振临界速度。如果用$V-g$法求解，则根据$V-g$曲线，也可以间接地了解机翼在亚临界情况下自由振动的衰减快慢程度。为了更直接地了解机翼在亚临界情况下，自由振动衰减的情况，特别是为了与飞行颤振试验中实测的亚临界振动衰减特性进行对比，上一世纪七十年代初期，在美国提出了一种求解颤振行列式的方法，称为$p-k$法。用它不仅可以求出颤振临界速度，而且可以得到亚临界情况下的振动衰减率。

在这一方法中，假定机翼作任意运动，即：

$$
\begin{aligned}
h &= h_0 \exp[(\gamma + i)\omega t] = h_0 \exp(\bar{p}t) \\
\alpha &= \alpha_0 \exp[(\gamma + i)\omega t] = \alpha_0 \exp(\bar{p}t)
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

其中，$\bar{\mathrm{p}} = (\gamma + \mathrm{i})\omega = \gamma\omega + \mathrm{i}\omega$，显然有：

$$
\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln[\frac{h(t + \frac{2\pi}{\omega})}{h(t)}]
\tag{5.62}
$$

它代表了振动的衰减率。

机翼作任意运动时的气动力计算比作简谐运动时的气动力计算更加复杂，而对颤振分析来说，主要关心的还是颤振临界状态。在临界状态下，机翼作简谐振动，$p-k$法假定在颤振临界点附近的亚临界情况下，机翼的振动可以近似看成是简谐的，在计算气动力时，仍然采用简谐振动机翼的非定常气动力公式，在计算中所用的减缩频率k就取（5.61）式中与ω相对应的k。

机翼作简谐运动时，有$\ddot{h} = -\omega^2 h$，而对（5.60）式则有$\dot{h} = \dfrac{dh}{dt} = \bar{p}h$，$\ddot{h} = \dfrac{d^2 h}{dt^2} = \bar{p}^2 h$，

可见，$\bar{p}$ 实际上可视为一微分算子，对简谐振动机翼所导出的（5.45）式，只需用 $\frac{d^2}{dt^2}$（或 $\bar{p}^2$）代替（$-\omega^2$），即可导出作任意运动时机翼的颤振方程及颤振行列式。通常在计算时，引入无因次算子，即：

$$\begin{aligned} p &= \frac{b}{V}\bar{p} \\ &= \frac{b}{V}(\gamma\omega + i\omega) \\ &= \gamma k + ik \\ &= \delta + ik \end{aligned} \tag{5.63}$$

于是，可得二元机翼颤振行列式为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu[(p^2+(\frac{\omega_\alpha b}{V})^2(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha})^2]-k^2L_h & \mu x_\alpha p^2 - k^2[L_\alpha - (\frac{1}{2}+a)L_h] \\ \mu x_\alpha p^2 - k^2[M_h - (\frac{1}{2}+a)L_h] & \mu r_\alpha^2[(p^2+(\frac{\omega_\alpha b}{V})^2]-k^2[M_\alpha - (\frac{1}{2}+a)(L_\alpha + M_h) + (\frac{1}{2}+a)^2 L_h] \end{vmatrix} = 0 \tag{5.64}$$

上式展开后是一个关于 p 的复系数二次代数方程，当然，这些复系数是在取定一个 k 值后才能确定的。

p-k 法的实质是在给定的一个风速（飞行速度）下，求出振动运动的衰减率（由 p 的实部确定）及振动频率（由 p 的虚部确定），我们对（5.64）式考察后可知，它实际上只含有一个未知量 p，因为 L_h, L_α 等系数中所隐含的 k 及（5.64）式中出现的 k，其实就是 p 的虚部，故 k 不是独立未知量。速度 V 是已经给定的，这样从表面上看，一个方程解一个未知数是没有什么问题的。但由于 k 在方程中不独立出现，且只是 p 的虚部，所以在具体求解时，仍需要进行迭代。对此有两种途径：

（1）首先给定一个 V 值，并设两个 p 值，$p_1 = \delta_1 + ik_1$，$p_2 = \delta_2 + ik_2$，由气动系数表（或经过插值）求得 k_1 及 k_2 所对应的气动系数值，代入（5.64）式分别算出 $\Delta_1 = \Delta(p_1, k_1)$ 及 $\Delta_2 = \Delta(p_2, k_2)$，然后按牛顿割线法，由下式：

$$p_{j+1} = (p_j \Delta_{j-1} - p_{j-1}\Delta_j)/(\Delta_{j-1} - \Delta_j) \tag{5.65}$$

找出下一次的迭代值 p_{j+1}，如此作下去，直到找到使 $\Delta = 0$ 的解 $p_c = \delta_c + ik_c$，从而求得：

$$\gamma_c = \frac{\delta_c}{k_c} \tag{5.66}$$

但这样只求得了在这个速度下，机翼的一种振动模态，即一个振动分支上的一个点，还必须再进行如上过程的计算，把一个速度下的所有分支点（即每一个模态的自由振动衰减情

况，对二元机翼，每一个速度下应该有两个分支点）都求得后，再取另一个速度 V 重复上述计算过程。这样取若干个速度 V，重复上述计算，可求得各个分支的若干组 (V,γ) 点，将其连接起来画成 $\gamma\sim V$ 曲线，对应于 $\gamma=0$ 的速度就是颤振临界速度 V_F。

（2）在这种求解方法中，仍是首先给定一个速度 V 值，然后选取一个 k，查表（或通过插值）求得相应的 L_h,L_α 等系数，代入（5.64）式，将其展开，求解二次代数方程式得到两个根（在进行实际机翼的颤振计算时，通常是转化为求解复特征值问题的所有特征值）$p=p_R+ip_I$，将 P_I 与开始所选取的 k 值相比较，若 $p_I=k$，则求得了该风速下的一个解 p，从而可求得衰减率 $\gamma=\dfrac{p_R}{p_I}$，否则，再另选一个 k，重复上述求解过程，直到解出的 p_I 与开始迭代时所用的 k 值足够接近为止，从而得到 $\gamma-V$ 平面上的一个点。（实际在迭代时，可以采用数学上的某种优化搜索方法以加快迭代的收敛速度）。应注意，上述迭代过程应该分别对 p 的两个根进行，这样才能算出在一个风速下，机翼的两个模态分支的振动衰减率，即对每一个 k 值，最终应得到 $\gamma-V$ 平面上的两个点。选取一系列 V 值，重复上述过程，计算出 $\gamma-V$ 平面上的一系列点 (γ_i,V_i)，将同一模态所对应的点连成两条（对两个自由度的二元机翼）$\gamma-V$ 曲线，曲线上对应于 $\gamma=0$ 的速度 V，就是所求的颤振临界速度 V_F。

由此可见，不论采用何种解法，用 $p-k$ 方法计算颤振临界速度，计算工作量都是相当大的。但正如前文所述，$p-k$ 法的优点在于，当所求的 γ 值不太大时，振动运动接近简谐状态，可以认为 γ 就是亚临界振动的真实衰减率，可以用来和颤振飞行试验或风洞试验所得到的结果进行比较，也就是说，由 $p-k$ 法求得的 $\gamma\sim V$ 曲线对试验更有指导意义。这正是 $p-k$ 法获得广泛应用的原因。目前，几乎所有带气动弹性分析功能的商业软件中，都有用 $p-k$ 法来求解颤振临界速度的模块。

§5.5 考虑压缩性效应的颤振计算

在飞行速度较高时，即使在亚音速情况下，也应该考虑空气的压缩性效应。在计及空气的压缩性效应后，气动力除取决于减缩频率外，还取决于飞行的马赫数。这样，在计算颤振时，除了预设 k 值外，还必须预设马赫数 M，才能查到相应的气动系数值，具体的考虑过程，则随颤振临界速度计算方法而不同。下面就针对两种常用的颤振临界速度计算方法分别进行

说明。

一、$V-g$ 法

当用$V-g$ 法求解颤振临界速度时，通常计算的出发点是给定高度，于是音速a也随之确定，选用某一个k值后，V 并不知道，因此只好先预选一个马赫数M ，按该马赫数下的气动系数表,由相应k值查得(或通过插值得到)对应的L_h, L_α等系数值,然后按前述的$V-g$ 法计算过程，找出V_F （这个过程实际上是一个“ k 试凑 ”过程），若算出的这个V_F与计算高度H上的音速a之比，即$\frac{V_F}{a}$，正好等于开始计算时所预选的M数，那么就得到了所要求解的颤振临界速度。但是，通常预选的M数与计算出的$\frac{V_F}{a}$之值不会恰好相等，从而必须再加上一个对M数的迭代过程，即首先在给定高度上设一组M数，对应于每一马赫数M，按$V-g$ 法求得颤振临界速度$\mathrm{V_F}$,然后做出$V_F \sim M$ 曲线,如图 5-9 所示,它与直线$V=aM$的交点的纵坐标即为所求的V_F。

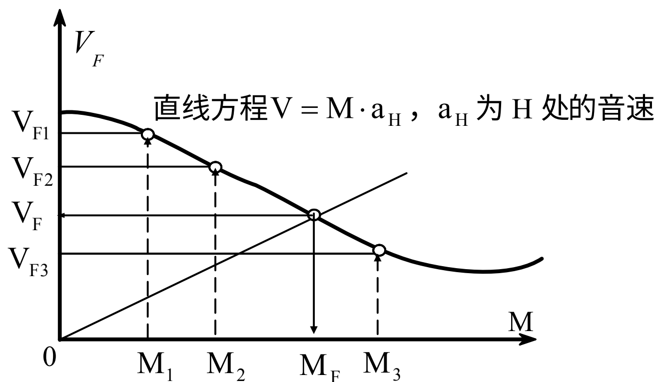


图 5-9　考虑压缩性的 $V-g$ 法迭代过程示意图

二、 $p-k$ 法

实际上，用 $p-k$ 法求颤振时，不必专门进行对马赫数M的迭代，因为在用 $p-k$ 法求解时，计算的出发点是在给定高度上预选一个速度V （往往它取得比V_F小），由此就可以确定相应的马赫数M （直接用所选取的V除以该高度处的音速a），随后再查对应于该马赫数M的气动系数表，按前述用 $p-k$ 法计算颤振临界速度的过程进行迭代计算，得到的结果就是该马赫数M下，计及空气的压缩性效应时机翼的响应情况或颤振临界速度。可以说，用

$p-k$ 法计算颤振时，压缩性效应是自动考虑了的。

本章仅介绍了颤振求解的几种常用方法，它们都有各自的优点。虽然都是针对二元机翼的颤振求解进行介绍的，但求解方法的原理和计算过程同样适合于实际三元机翼的工程颤振分析计算。不同之处仅在于计算的规模更大，广义气动力的计算更加复杂而已。

实验表明，V_F 随马赫数 M 的变化情况大致如图 5-10 所示。在 $M=1.0$ 附近，V_F 值会急剧降低，形成一个所谓的“跨音速凹坑”。

飞机设计中，最简单的方法是由风洞实验找到“凹坑”最低点 V_{Fd}，算出它与较低马赫数（例如 $M=0.1$）下计算出来的 V_{F_0} 的比值 $\dfrac{V_{F_0}}{V_{F_d}}$（其统计平均值大约是 1.2），然后，用这个比值来修正以后按 $M=0.1$ 算出的 V_F。这也就是说，取 $\dfrac{V_F}{1.2}$ 作为所设计飞机的颤振速度。这种作法被称为“压缩性修正”。可以预期，在高速风洞颤振试验更普遍使用时，上述压缩性修正因子的概念将被放弃。

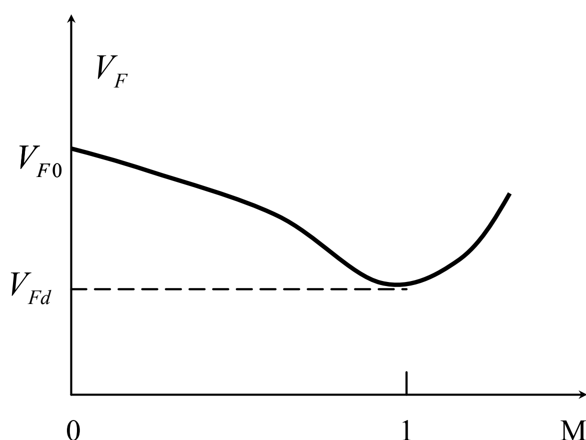


图 5-10 颤振速度计算的跨音速凹坑现象示意图

第六章　三元机翼的颤振计算

§6.1 引言

第五章中所介绍的二元机翼颤振计算方法，可以直接推广到三元机翼，但是其数值计算过程要复杂得多，计算规模也要大得多。根据三元机翼的结构特点，可以将三元机翼的颤振计算分为（大展弦比）长直机翼颤振计算和小展弦比机翼的颤振计算，而且与二元机翼颤振分析一样，本章介绍的三元机翼颤振计算也以线性化气动力理论为基础。

§6.2 长直机翼的颤振计算

对于长直机翼，其变形的结构特点是：具有一个近似于直线的弹性轴，弦向剖面基本上不变形，从而可以将长直机翼的变形用弹性轴的弯曲 $h(y,t)$ 和弦向剖面绕弹性轴的扭转 $\alpha(y,t)$ 来表示，即把翼面划分成若干窄条翼段，每一窄条翼段的运动用它的弯曲运动 $h_i(t)$ 和 $\alpha_i(t)$ 来描述，这样，每一窄条翼段只有两个自由度，窄条翼段上所受的气动力，可以用二元机翼理论来计算，即机翼上的气动力采用“ 片条理论 ”来计算。

基于上述机翼结构变形特点，机翼上任意一点的变形可写为：

$$z(x,y,t)=h(y,t)+r(x)\alpha(y,t) \tag{6.1}$$

$r(x)$ 为以弹性轴量起的弦向距离，z, h 均向下为正，α 以机翼前缘抬头为正。

机翼的第 j 阶固有振型 $z_j(x,y)$ 也可以表示为：

$$z_j(x,y)=h_j(y)+r(x)\alpha_j(y) \tag{6.2}$$

根据振型迭加法：

$$\begin{aligned} z(x,y,t) &= \sum_{j=1}^{n} z_j(x,y)\xi_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n}[h_j(y)+r(x)\alpha_j(y)]\cdot\xi_j(t) \end{aligned} \tag{6.3}$$

由此算出机翼的动能、势能，并代入到拉格朗日方程可得：

$$M_j\ddot{\xi}_j+M_j\omega_j^2\xi_j=Q_j \qquad (j=1,2,3,\cdots\cdots n) \tag{6.4}$$

其中，$M_j=\int_0^l[mh_j^2(y)+2S_\alpha h_j(y)\alpha_j(y)+I_\alpha\alpha_j^2(y)]dy$，$\xi_{\rm j}$ 为对应于第 j 阶固有振型的主

坐标；l 为半展长；$m=\int_{弦长}\overline{\mathrm{m}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dx}, S_{\alpha}=\int_{弦长}\overline{\mathrm{m}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{r}(\mathrm{x})\mathrm{dx}, I_{\alpha}=\int_{弦长}\overline{\mathrm{m}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{r}^{2}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ 分别为单位展长机翼的质量、对弹性轴的质量静矩和惯性矩，ω_j 为第 j 阶固有频率，Q_j 为与第 j 个主坐标对应的广义力，由气动力对主坐标所做的虚功求得。

显然，如何选取固有振型及取多少阶固有振型，将决定颤振分析工作的繁简。

通常，对于长直机翼，在没有集中质量时，可以只取第一阶主弯曲振型和第一阶主扭转振型来初步估算颤振。

此外，工程上还采用一种更简化的方法，即采用与第一阶纯弯曲和第一阶纯扭转振型相应的 $h(t)$ 和 $\alpha(t)$ 作为两个广义坐标。即：

$$z(x,y,t)=f(y)h(t)+r(x)\phi(y)\alpha(t) \tag{6.5}$$

注意这时由于 $f(y),\phi(y)$ 不是固有振型，由此代入拉格朗日方程，得到的运动方程将是耦合的。

如果按照准定常或非定常气动力理论得到了单位展长机翼（二元机翼）上的气动力 $L'(y,t)$ 和气动力矩 $M'(y,t)$，则由广义力定义可得到对应于 $h(t)$ 和 $\alpha(\mathrm{t})$ 的广义气动力为：

$$\begin{aligned} Q_h &= \int_0^l L'(y,t)f(y)dy \\ Q_\alpha &= \int_0^l M'(y,t)\phi(y)dy \end{aligned} \tag{6.6}$$

如果采用二元机翼的气动力公式，则只需用 $f(y)h(t),\phi(y)\alpha(t)$ 分别代替公式中的 $h(t),\alpha(t)$ 即可。

最后得到的颤振行列式也是二阶的，颤振临界速度的求解方法与二元机翼颤振计算是完全一样的。

由于现代计算技术的发展，除非没有合适的三元机翼气动力计算手段，目前在飞机颤振工程分析中，一般不再采用上面介绍的颤振计算方法，而是把实际机翼都按一般平面形状（小展弦比）机翼对待，直接使用下一节所介绍的方法进行颤振计算。

§6.3 小展弦比机翼的颤振计算

对于小展弦比三元机翼，在进行颤振计算时与长直机翼的颤振计算有显著不同，首先从结构上看，其变形不能再简单地用弯扭两个振型来描述，且弦向变形不可忽略（图 6-1），从

气动力计算来看，不能再用片条理论来计算，而需要按升力面气动力理论来计算。

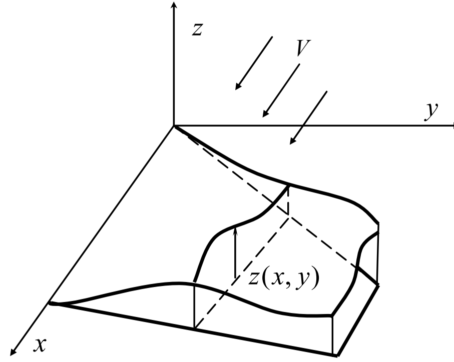


图 6-1　小展弦比三元机翼的振动变形

首先机翼的变形可以用其前 n 阶固有振型的迭加来表示：

$$z(x,y,t)=\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x,y)\xi_j(t) \tag{6.7}$$

这里，ϕ_{j} 为机翼的第 j 阶固有振型，且有：

$$\phi_j^T M\phi_i=\begin{cases}M_j & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases},\quad \phi_j^T K\phi_i=\begin{cases}K_j=\omega_j^2 M_j & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases} \tag{6.8}$$

M,K 为机翼的质量矩阵和刚度矩阵，可以由有限元法得到，M_j,K_j 是与第 j 阶固有振型相应的广义质量和广义刚度。

机翼的动能、势能可写为：

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}M_j\dot{\xi}_j^{\ 2}\\ U&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}K_j\xi_j^{\ 2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}M_j\omega_j^2\xi_j^{\ 2}\end{aligned} \tag{6.9}$$

设翼面上气动力分布为 $P(x,y,t)$，则当机翼有虚位移 δz_j 时，系统的虚功为：

$$\begin{aligned}\delta W_{ej}&=\iint_S P(x,y,t)\delta z_j dxdy=\iint_S P(x,y,t)\phi_j(x,y)\delta\xi_j dxdy\\ &=(\iint_S P(x,y,t)\phi_j(x,y)dxdy)\delta\xi_j\end{aligned} \tag{6.10}$$

故有：

$$Q_j = \iint_S P(x,y,t)\phi_j(x,y)dxdy \tag{6.11}$$

将T, U, Q_j代入拉格朗日方程得到小展弦比机翼的颤振方程：

$$M_j\ddot{\xi}_j + M_j\omega_j^2\xi_j = Q_j \qquad j = 1,2,\cdots\cdots n \tag{6.12}$$

在没有完全非定常气动力计算方法的情况下，通常只能在机翼作简谐振动时计算机翼的非定常气动力。在使用简谐非定常气动力并采用$V-g$法时，设$\xi_j = \bar{\xi}_j e^{i\omega t}$，引入结构阻尼因子$g$，代入方程（6.12）有：

$$-\omega^2 diag[M_j]\{\bar{\xi}\} + (1+ig)diag[M_j\omega_j^2]\{\bar{\xi}\} = \{Q\} \tag{6.13}$$

这里：

$$\{Q\} = (\frac{1}{2b}\rho V^2)[A]\{\bar{\xi}\} \tag{6.14}$$

$[A]$为非定常气动力影响系数矩阵

代入方程（6.13）得到如下形式的方程：

$$\{diag[M_j] + \frac{1}{2}\rho b(\frac{1}{k})^2[A] - \Lambda \cdot diag[M_j(\frac{\omega_j}{\omega_1})^2]\}\{\bar{\xi}\} = \{0\} \tag{6.15}$$

其中，$\Lambda = (1+ig)(\frac{\omega_1}{\omega})^2$，$\omega_1$为机翼的基频。颤振行列式为：

$$\left| diag[M_j] + \frac{1}{2}\rho b(\frac{1}{k})^2[A] - \Lambda \cdot diag[M_j(\frac{\omega_j}{\omega_1})^2] \right| = 0 \tag{6.16}$$

在实际求解时，将（6.16）式化为一个特征值问题来求解，按$V-g$法求解步骤，求得特征值Λ_i，就可得到机翼颤振临界速度V_F。

§6.4 三元机翼的广义气动力计算

为了计算方程（6.13）中的广义气动力Q_j，需要首先求得机翼上的气动压力分布，对于作任意运动的机翼上的气动压力，即所谓完全非定常气动力的计算非常复杂，并且没有达到完全成熟的程度，各种计算方法尚在发展之中。另一方面，从上一章我们看到，应用$V-g$法或$p-k$法计算颤振临界速度时，只需用到简谐气动力，这可以用简谐振动翼面的非定常升力面气动力理论来计算，例如在亚音速范围内使用的偶极子格网法或核函数法。其具体的计算方法不属于本课程的内容，可以参阅非定常空气动力计算方面的书籍。假定我们已经用偶极子格网法计算求得了作简谐运动机翼的非定常气动力影响系数（下洗影响系数）矩阵：

$$[D]=[D_{ij}] \qquad i,j=1,2,3,\cdots\cdots NT \tag{6.17}$$

NT 为机翼上气动网格的总数，D_{ij} 表示由于第 j 个网格上有单位压差系数 $\mathrm{c_p}$ 而在第 i 个网格控制点产生的下洗。一般，气动网格的下洗控制点与计算振型时的结构网格并不重合，气动网格下洗控制点处的振型值要通过对结构网格点振型值进行插值得到。

机翼作简谐振动时垂直于翼面的变形，可以用其前 n 阶振型的迭加来表示：

$$\begin{aligned} z(x,y,t) &= \sum_{j=1}^{n}\phi_j(x,y)\xi_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\phi_j(x,y)\bar{\xi}_j e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{6.18}$$

从而升力面的下洗为（向下为正）：

$$w(x,y,t) = -(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot V+\frac{\partial z}{\partial t}) = -\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}V+i\omega\phi_j)\bar{\xi}_j e^{i\omega t} = W(x,y)\cdot e^{i\omega t} \tag{6.19}$$

将各下洗控制点的下洗组成的下洗向量无因次化为：

$$\begin{aligned} \{\overline{w}\} = \{\frac{W}{V}\} &= -\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial\phi_j}{\partial x}+i\frac{\omega}{V}\phi_j)\bar{\xi}_j \\ &= -\sum_{j=1}^{n}(b\frac{\partial\phi_j}{\partial x}+ik\phi_j)\frac{\bar{\xi}_j}{b} \\ &= -[(b\frac{\partial}{\partial x}+ik)\Phi]\{\frac{\bar{\xi}}{b}\} \end{aligned} \tag{6.20}$$

其中，$\Phi=[\phi_j]$ 为对各气动网格的下洗控制点进行插值后得到的固有振型矩阵。

将上式代入下洗与压差系数的关系式：

$$[D]\{c_p\}=\{\overline{w}\} \tag{6.21}$$

可以解出：

$$\begin{aligned} \{c_p\} &= [D]^{-1}\{\overline{w}\} \\ &= -[D]^{-1}[(b\frac{\partial}{\partial x}+ik)\Phi]\{\frac{\bar{\xi}}{b}\} \end{aligned} \tag{6.22}$$

令：

$$\{c_p^{(j)}\} = -[D]^{-1}\{(b\frac{\partial}{\partial x}+ik)\phi_j\} \tag{6.23}$$

则有：

$$\{c_p\} = \sum_{j=1}^{n} \{c_p^{(j)}\} \frac{\overline{\xi}_j}{b} \tag{6.24}$$

从而机翼作简谐振动时，第 j 个广义坐标对应的广义气动力为：

$$\begin{aligned}
Q_j &= \iint_S P(x,y,t)\phi_j(x,y)dxdy \\
&= \sum_{m=1}^{NT} P_m \phi_m^{(j)} \Delta S_m \\
&= \sum_{m=1}^{NT} c_{pm} \frac{1}{2}\rho V^2 \phi_m^{(j)} \Delta S_m \\
&= \sum_{m=1}^{NT} (\sum_{l=1}^{n} c_{pm}^{(l)} (\frac{\overline{\xi}_l}{b})) \frac{1}{2}\rho V^2 \phi_m^{(j)} \Delta S_m \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{jl} \overline{\xi}_l (\frac{1}{2}\rho V^2 / b)
\end{aligned} \tag{6.25}$$

其中，NT 为气动网格总数，$\varDelta S_m$ 为第 m 个气动网格的面积，$\phi_m^{(j)}$ 为第 j 阶振型在第 m 个气动网格的气动力作用点处的振型值

$$\begin{aligned}
a_{jl} &= \sum_{m}^{NT} c_{pm}^{(l)} \phi_m^{(j)} \varDelta S_m \\
&= \{\phi_j\}^T [\varDelta S]\{c_p^{(l)}\} = -\{\phi_j\}^T [\varDelta S][D]^{-1}\{(b\frac{\partial}{\partial x} + ik)\phi_l\} \\
&\qquad (j,l = 1,2,\cdots n)
\end{aligned} \tag{6.26}$$

其中，$[\varDelta S] = diag(\varDelta S_1 \ \varDelta S_2 \ \cdots \varDelta S_{NT})$ 为各气动网格面积组成的对角阵。

将各广义气动力列阵写成矩阵形式为：

$$\{Q\} = \frac{1}{2}(\rho V^2 / b)[A]\{\overline{\xi}\} \tag{6.27}$$

其中：

$$\begin{aligned}
[A] &= [a_{jl}] \\
&= -\varPhi^T [\varDelta S][D]^{-1}[(b\frac{\partial}{\partial x} + ik)\varPhi]
\end{aligned} \tag{6.28}$$

就是 6.3 节的（6.14）式中的非定常气动力影响系数矩阵。

§6.5 用活塞理论计算机翼颤振临界速度

当飞行马赫数 M 远大于 1 时（一般要求 $M > 2.5$），可以用一种简化的气动力理论——活塞理论来分析机翼颤振特性，计算出颤振临界速度。

活塞理论认为，当 $M >> 1$ 时，机翼所产生的扰动只传播到机翼近处很小的区域中。如图 6-2 所示，对薄翼来说，机翼上下表面近似平面，对有限翼展机翼，除翼梢附近外的机翼

上、下表面所产生的扰动近似地沿机翼表面的法线方向传播，机翼表面各点间的相互影响很小。即$\vec{V}=\vec{V}_{\infty}+\vec{w}$，对微扰动，$\beta$角很小，$w$的方向与$z$轴的方向近似平行，即$w$是扰动速度的主要分量。若略去机翼表面各点间相互影响，便可以假设机翼表面各点的扰动是沿着该点法线方向传播的，这样，这种传播就像是气缸中活塞所产生的扰动的传播一样（图 6-3）。

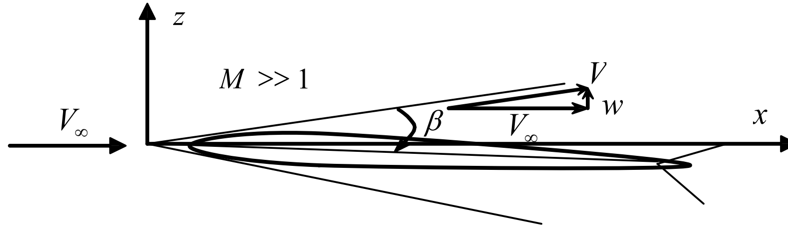


图 6-2 超音速气流中机翼表面的扰动

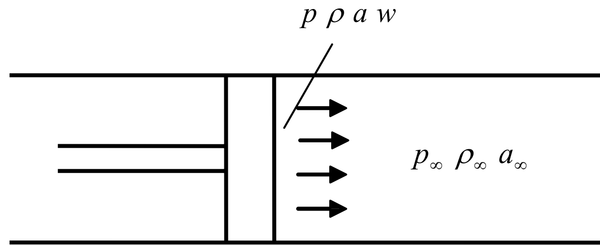


图 6-3 气缸中活塞的运动

将气缸中活塞运动的扰动传播规律性用于超音速气流中的各点，就形成了$M>>1$的超音速气流中机翼气动力的活塞理论。

考察一个无限长的气缸，其中未经扰动的气体的压力、密度和音速分别为$p_{\infty},\rho_{\infty},a_{\infty}$，速度为零，活塞前进速度为$w$，且设：

$$|w|<<a_{\infty} \tag{6.29}$$

则活塞产生的运动是微扰动，扰动的传播过程是等熵过程。现在的问题是求活塞表面的压力p、密度ρ和音速a。

设在dt时间内，活塞运动速度变化了dw，那么在dt时间内，扰动传播的距离是adt，受扰动气体质量为$\rho aSdt$，（S为活塞面积），故总的动量变化为$\rho aSdtdw$，现在压力的变化为dp，故活塞产生的冲量为$dpSdt$。于是有：

$$dpSdt=\rho aSdtdw \tag{6.30}$$

即：

$$dp=\rho\cdot a\cdot dw \tag{6.31}$$

由等熵公式：

$$\frac{p}{p_\infty}=(\frac{\rho}{\rho_\infty})^\kappa \tag{6.32}$$

其中，κ为比热比（对空气$\kappa=1.4$），且有：

$$a^2=\kappa\cdot\frac{p}{\rho} \tag{6.33}$$

代入（6.31）式，得到：

$$p^{-\frac{\kappa+1}{2\kappa}}\cdot dp=\frac{\kappa}{a_\infty}p_\infty^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\cdot dw \tag{6.34}$$

积分得到：

$$\frac{2\kappa}{\kappa-1}p^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}=\frac{\kappa}{a_\infty}p_\infty^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}w+c \tag{6.35}$$

当$p=p_\infty$时，$w=0$故有：

$$c=\frac{2\kappa}{\kappa-1}p_\infty^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \tag{6.36}$$

代入上式并整理得到：

$$p=p_\infty(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot\frac{w}{a_\infty})^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.37}$$

由（6.29）式知，$\left|\frac{w}{a_\infty}\right|<<1$，故（6.37）式可以近似展开为：

$$\frac{p}{p_\infty}=1+\kappa\frac{w}{a_\infty}+\frac{\kappa(\kappa+1)}{4}(\frac{w}{a_\infty})^2+\frac{\kappa(\kappa+1)}{12}(\frac{w}{a_\infty})^3+\cdots \tag{6.38}$$

当上式只保留一次项时，称为一阶活塞理论（又称为线性活塞理论）：

$$p-p_\infty=\rho_\infty a_\infty w \tag{6.39}$$

保留二次项则得到二阶活塞理论公式：

$$p-p_\infty=\rho_\infty a_\infty^2[\frac{w}{a_\infty}+\frac{\kappa+1}{4}(\frac{w}{a_\infty})^2] \tag{6.40}$$

保留三次项得到的三阶活塞理论的公式为：

$$p - p_{\infty} = \rho_{\infty} a_{\infty}^2 [\frac{w}{a_{\infty}} + \frac{\kappa+1}{4}(\frac{w}{a_{\infty}})^2 + \frac{\kappa+1}{12}(\frac{w}{a_{\infty}})^3] \tag{6.41}$$

二阶以上活塞理论都称为非线性活塞理论。上面各公式中，w 是相对活塞而言，以离开活塞表面为正。

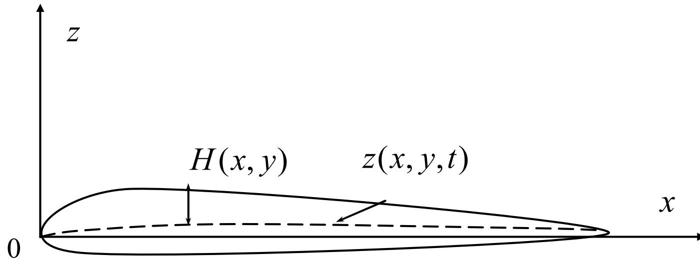


图 6-4　超音速流中的机翼翼型

用活塞理论计算机翼气动力时，机翼上一点的法向下洗速度（以离开机翼表面为正）相当于活塞运动速度 w，设翼型中线位置为 $z(x,y,t)$，由翼型中线量起的厚度函数为 $H(x,y)$，其则对机翼上、下表面，分别有：

$$\begin{aligned} w_u &= (V\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})z(x,y,t) + V\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \\ w_d &= -(V\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})z(x,y,t) + V\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{aligned} \tag{6.42}$$

代入（6.40）式，记 $M = \dfrac{V}{a_{\infty}}$，可得到二阶活塞理论的机翼上下表面压差（省去下标 ∞）：

$$\Delta p(x,y,t) = p_d - p_u = -2\rho a[1 + \frac{\kappa+1}{2}M\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)](V\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})z(x,y,t) \tag{6.43}$$

在应用活塞气动力理论研究超音速气流中机翼的颤振时，若与前面 6.3 节一样，采用机翼前 n 个固有振型 $\phi_i(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots n)$ 作为位移函数，并相应的以 $\xi_i \ (i = 1,2,\cdots n)$ 作广义坐标，则：

$$z(x,y,t) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x,y)\xi_j(t) \tag{6.44}$$

则可同样导出与（6.12）式完全相同的颤振方程：

$$M_i\ddot{\xi}_i + M_i\omega_i^2\xi_i = Q_i \qquad i = 1,2,\cdots\cdots n \tag{6.45}$$

只是此时要用活塞理论来计算右端的广义气动力Q_i。我们采用二阶活塞理论，将（6.44）式代入（6.43）式中，得到：

$$\Delta p(x,y,t) = -2\rho\, a\sum_{j=1}^{n}[1+G\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)][V\frac{\partial}{\partial x}\phi_j(x,y)\xi_j(t)+\phi_j(x,y)\dot{\xi}_j(t)] \quad (6.46)$$

其中，$G=\frac{\kappa+1}{2}\cdot M$。将此式代入（6.10）式得到：

$$\begin{aligned} Q_i &= \iint_S \Delta p(x,y,t)\phi_i(x,y)dxdy \\ &= -2\rho\, a\sum_{j=1}^{n}[V(A_{ij}+GC_{ij})\xi_j(t)+(B_{ij}+GD_{ij})\dot{\xi}_j(t)] \quad (i=1,2,\cdots n) \end{aligned} \quad (6.47)$$

其中，

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \iint_S [\frac{\partial}{\partial x}\phi_j(x,y)]\phi_i(x,y)dxdy \\ B_{ij} &= \iint_S \phi_j(x,y)\cdot\phi_i(x,y)dxdy \\ C_{ij} &= \iint_S [\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)][\frac{\partial}{\partial x}\phi_j(x,y)]\phi_i(x,y)dxdy \\ D_{ij} &= \iint_S [\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)]\phi_j(x,y)\cdot\phi_i(x,y)dxdy \end{aligned} \quad (6.48)$$

在颤振临界状态下，机翼作简谐振动：

$$\xi_i(t)=\xi_{i0}e^{i\omega t} \quad (6.49)$$

采用 V-g 法，引入结构阻尼因子，则颤振运动方程为：

$$M_i\left[\left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2(1+ig)-1\right]\cdot\xi_{i0}+\frac{2\rho}{M}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{V}{\omega}\right)^2(A_{ij}+GC_{ij})+i\left(\frac{V}{\omega}\right)(B_{ij}+GD_{ij})\right]\xi_{j0}=0 \quad (6.50)$$

$$(i=1,2,\cdots n)$$

对应的颤振行列式为：

$$\left|\frac{M}{2\rho}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2(1+ig)diag\left[M_i\left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2\right]-\frac{M}{2\rho}diag[M_i]+[A+GC]\left(\frac{V}{\omega}\right)^2+i[B+GD]\left(\frac{V}{\omega}\right)\right|=0 \qquad (6.51)$$

上式中方括号均表示矩阵，A,B,C,D 分别为（6.48）对应元素组成的方阵。若以 (V/ω) 为自变量，即可解得 V_F 和 ω_F。

应用活塞理论来计算机翼在超音速气流中的颤振临界速度时，马赫数越高，结果精度越好。试验结果表明，对于三角翼的计算结果精度优于非尖削后掠翼，这可能是因为活塞理论不适合于翼梢部位。由于活塞理论在非定常理论中考虑了非线性项的影响，而且公式简洁，大马赫数下的计算精度也高，故在超音速颤振问题计算时大多采用活塞理论。

第七章　操纵面颤振分析

§7.1 各种涉及操纵面的颤振型态

飞机为了在飞行中保持平衡和进行机动飞行，在机翼、尾翼上都带不同功能的操纵面，如机翼上的副翼、水平安定面上的升降舵和垂直安定面上的方向舵等，由于这些操纵面都具有有限的操纵刚度，自身也是一个小型的弹性升力面，因而飞机在飞行中除了会发生以机翼振动模态为主的机翼颤振外，还可能会发生以操纵面运动模态为主的或有操纵面运动模态参与的所谓操纵面颤振。它们是机翼弯曲—副翼偏转型颤振、机翼扭转—副翼偏转型颤振型，机翼弯/扭—副翼偏转型颤振、垂尾—方向舵耦合型颤振，方向舵—垂尾—后机身扭转耦合型颤振，升降舵—平尾耦合型颤振，升降舵—平尾—后机身垂直弯曲耦合型颤振以及其它一些包括操纵面及调整片运动的耦合颤振型态。

机翼弯曲—副翼偏转型颤振的机理已在 4.2 节中描述过，它和机翼弯/扭型颤振相似，都是以两个振型的耦合为前提的。但是操纵面颤振速度很难计算得像机翼弯/扭颤振速度那样准确，其原因是：

（1）操纵面非定常气动力的理论计算结果不准确，因为理论分析中忽略了空气的粘性效应，而粘性效应对操纵面的铰链气动力矩影响显著。

（2）操纵面的铰链及支持的结构刚度以及操纵刚度，很难准确计算或测量得到。

（3）对于人力操纵系统，机械连结系统之中不可避免地会有诸如间隙、摩擦等非线性因素存在。对于动力操纵系统，除上述非线性因素外，还必须考虑作动器液压系统的非线性特性。

§7.2 操纵面的质量平衡概念

从弯扭耦合颤振机理及频率重合理论对颤振机理的解释，我们看到，防止颤振产生或提高颤振临界速度的关键是要消除机翼结构各种不同自由度之间可能发生的耦合，即使不能完全消除耦合，只要能使各自由度之间没有强的耦合，也能使颤振速度得到提高来满足设计要求，而操纵面质量平衡的概念和方法的提出，正是基于这种思想。对于操纵面上的气动力很难准确计算，而且操纵面的操纵刚度也很难确定，对于颤振速度的理论计算往往误差很大，因此，在工程实际中多采用质量平衡的方法来改善操纵面的颤振特性，使这类颤振不会在设计的飞行包线内发生。

操纵面质量平衡的概念究竟是怎样的呢？我们以图 7-1 所示的一个带有副翼的悬臂机翼为例来具体说明。

假设机翼上副翼的重心位于铰链轴的后面，那么当机翼作弯曲运动（带副翼部分的剖面作上下平移运动）时，副翼就会因惯性力而作偏转运动，我们称之为惯性耦合，如果副翼的

重心位于铰链线上，就不会有惯性耦合。

但是副翼作为升力面，还会产生对铰链轴的空气动力力矩，也就是说存在有空气动力耦合。此外还可能存在弹性耦合，对于设计人员来说，要消除弹性耦合和空气动力耦合通常是不可能的，但在一定条件下，却可以做到消除惯性耦合，这就是采用质量平衡的方法。我们已经知道，颤振发生的一个重要原因就是结构运动之间的惯性耦合，所以研究质量平衡问题，对颤振分析具有重要意义。

由颤振分析的实例得知，机翼—副翼颤振主要是由机翼弯曲与副翼偏转两种运动的耦合而产生的。故只需计及机翼弯曲和副翼偏转两个自由度，且通常假定副翼为刚体。现采用假设模态法来建立颤振运动方程，机翼的弯曲变形可取为：

$$h(y,t)=f(y)\cdot h(t) \tag{7.1}$$

记副翼偏转角为 $\beta(t)$，整个机翼系统的动能、势能为：

$$\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}\int_0^l\int_C[\dot{h}(y,t)]^2\rho_w dxdy+\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}\int_{CA}[\dot{h}(y,t)+\dot{\beta}x]^2\rho_a dxdy\\
&=\frac{1}{2}\dot{h}^2[\int_0^l\int_C f^2\rho_w dxdy+\int_{l_1}^{l_2}\int_{CA}f^2\rho_a dxdy]+\frac{1}{2}\dot{\beta}^2\int_{l_1}^{l_2}\int_{CA}x^2\rho_a dxdy+\dot{h}\dot{\beta}\int_{l_1}^{l_2}\int_{CA}fx\rho_a dxdy\\
&=\frac{1}{2}a_{11}\dot{h}^2+\frac{1}{2}a_{22}\dot{\beta}^2+a_{12}\dot{h}\dot{\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U&=\frac{1}{2}h^2\int_0^l EIf''^2dy+\frac{1}{2}k_\beta\beta^2\\
&=\frac{1}{2}c_{11}h^2+\frac{1}{2}c_{22}\beta^2
\end{aligned} \tag{7.2}$$

其中，ρ_w,ρ_a 分别代表机翼及副翼单位面积上的质量，C 表示机翼弦长，CA 表示副翼弦长，K_β 为副翼操纵刚度系数，副翼上质点的 x 坐标是由铰链轴向后算起为正，如图 7-1 所示。

将（7.1）、（7.2）式代入拉格朗日方程中，就有：

$$\begin{cases}a_{11}\ddot{h}+a_{12}\ddot{\beta}+c_{11}h=Q_h\\ a_{12}\ddot{h}+a_{22}\ddot{\beta}+c_{12}\beta=Q_\beta\end{cases} \tag{7.3}$$

上方程中：

$$a_{12}=\int_{l_1}^{l_2}\int_{CA}f(y)\cdot x\rho_a dxdy \tag{7.4}$$

是与质量平衡有关的系数。至此，我们可以将质量平衡的概念表述为：操纵面质量平衡

就是使操纵面的质量分布满足一定的平衡条件，在这种平衡条件下，

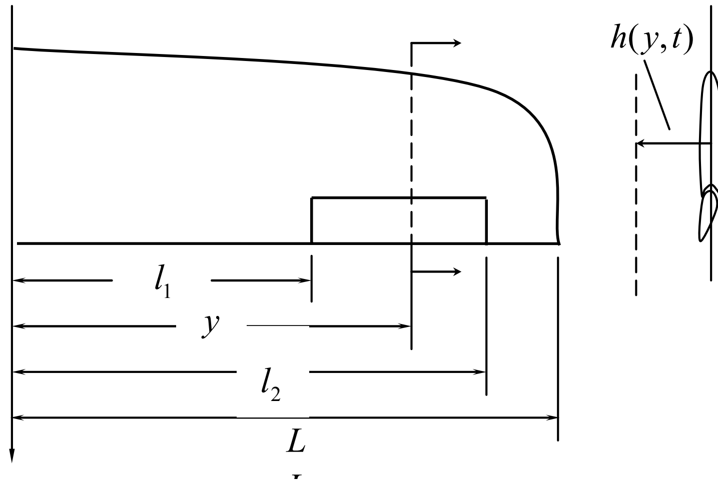


图 7-1 带副翼的长直机翼

机翼振动时，操纵面由于质量产生的惯性力所引起的对操纵面铰链轴的力矩为零，从而操纵面相对主翼面没有偏转，好像和主翼面连成一个整体一起振动。从颤振方程看，就是要求系数 a_{12} 为零。如果更进一步使气动力不耦合，则机翼的弯曲与副翼（操纵面）偏转运动完全解耦，即机翼的弯曲运动不会带动副翼（操纵面）的偏转，从 a_{12} 的表达式我们又知道，其值与机翼的振型 $f(y)$ 有关，即是说，副翼的质量平衡也是相对于机翼某个振型而言，显然对某个振型达到质量平衡的质量分布，对另一个振型就不一定是平衡的，所以质量平衡也只是按照几个主要振动形态来进行的。

判定质量平衡程度的指标，通常用“平衡度”来表示。通常在颤振规范中是按“静平衡度”和“动平衡度”来规定的。所谓静平衡就是要使：

$$\sum_{\text{整个操纵面}} m_i x_i = 0 \tag{7.5}$$

x_i 代表操纵面的微质量元 m_i 到铰链轴的距离，公式（7.5）的含义是操纵面重心在铰链轴上，这相当于前文中机翼的弯曲振型 $f(y)$ = 常数时，$a_{12}=0$ 的条件。当满足 $\sum_{\text{整个操纵面}} m_i x_i = 0$ 时，称为 100%静平衡的。若有 $\sum_{\text{整个操纵面}} m_i x_i < 0$ 则称为过度平衡，它表示操纵面重心位于铰链轴之前。静平衡度定义为：

$$\textbf{静平衡度} = \frac{\textbf{实际所加配重}}{\textbf{达到100\%静平衡所需配重}} \times 100\% \tag{7.6}$$

图 7-2 为某型飞机的机翼弯曲-副翼偏转型颤振速度 V_F 与静平衡度的关系曲线，对应每一静平衡度可算出两个 V_F 值，在此界限内为不稳定区，由图可见，超过一定过度平衡后，将

不再会发生此类型的颤振，这也正好与第四章分析弯扭颤振机理时所讲的，使副翼重心位于转轴之前可提高颤振速度的原则是一致的。

所谓动平衡是指质量分布使得 $\sum_{\text{整个操纵面}} m_i x_i y_i = 0$，并称此时为 100%动平衡的。其中 x_i 代表微质量元 m_i 到操纵面铰链轴的距离，对于机翼上的操纵面，y_i 代表微质量元 m_i 到翼根的距离，对于尾翼上的操纵面，y_i 代表微质量元 m_i 到机身弹性轴的距离。动平衡实际上相当于 $f(y) = y$，也就是翼面随机体做刚体滚转时，$a_{12} = 0$ 的条件。相应地，动平衡度定义为：

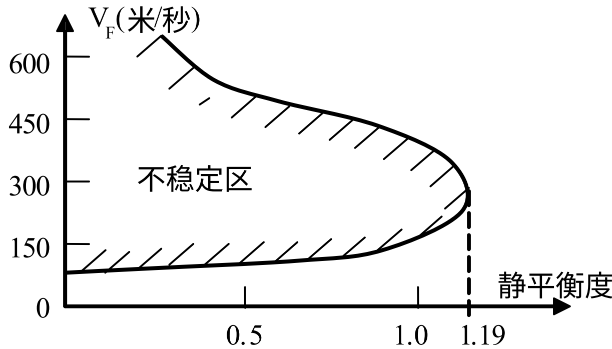


图 7-2 颤振速度 V_F 与静平衡度的关系曲线

$$\text{动平衡度} = \frac{\text{实际所加配重}}{\text{达到100\%动平衡所需配重}} \times 100\% \tag{7.7}$$

当 $\sum_{\text{整个操纵面}} m_i x_i y_i < 0$ 时，称为是过度动平衡。

颤振设计规范中，对各个操纵面的质量平衡要求都是针对某一种特定的颤振现象而规定的，例如，对于方向舵是为了防止机身扭转—机身侧弯—方向舵偏转型颤振；对于升降舵，是为了防止机身垂直弯—水平安定面弯曲—升降舵偏转型颤振；而对于副翼则通常是为了防止机翼弯曲—副翼偏转型颤振。

应该注意的是，由于质量平衡是对于某一振型而言的，我们不可能设计一个对于所有振型都满足质量平衡要求的机翼，而且，即使满足了质量平衡要求的机翼，也不意味着不会发生任何形式的颤振。但不论怎样，质量平衡概念在防止操纵面颤振方面，仍不失为一种简单而有效的方法。此外，质量平衡的动、静平衡度也可以作为初步估计颤振发生趋势的判据，为进一步的颤振分析作定性准备。

§7.3 消除操纵面颤振的质量平衡设计

长期以来，在飞机设计的工程实践中，针对消除操纵面颤振设计所采用的有效办法就是质量平衡，即在操纵面上设置配重，使操纵面重心前移，通常是使重心移到操纵面的转轴（铰链轴线）之前，达到所谓“ 过平衡 ”状态。

质量平衡至今仍被广泛用于带人力操纵系统的小型、中型飞机。从原理上来说（如在 4.2

节中所讲的机翼弯曲/副翼偏转型颤振机理），质量平衡设计仅对颤振模态中涉及主翼面（机翼，垂直及水平安定面）弯曲振型的操纵面颤振最为有效，这时配重使重心移到操纵面转轴之前，从而消除了操纵面旋转与主翼面弯曲，两种模态之间的惯性耦合，这就是 4.3 节中已说过的颤振设计中的“模态解耦”原则。由于“质量平衡”本质上不是按“频率分离”原则提出的防颤振措施，所以在应用质量平衡方法时，对它是否违反“频率分离”原则（即是否会使两个危险振型的频率因增加配重而彼此靠近）需予以注意。

图 7-3 所示，是操纵面旋转/主翼面弯曲型颤振中，配重质量 Δm 对颤振临界速度 V_F 的效应。由图可见，过平衡以后，有一个临界 Δm 值，使用超过该值的配重可以将使此类型的颤振完全消除。

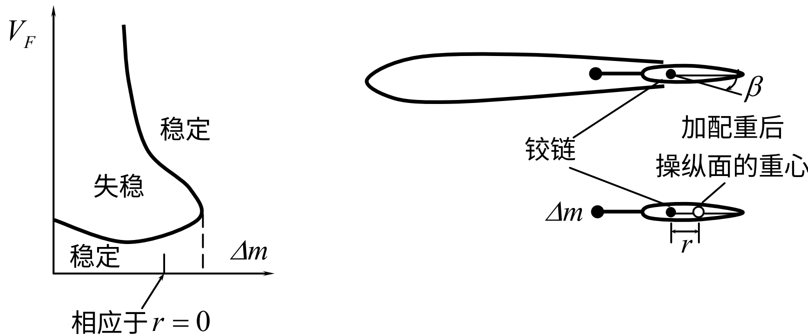


图 7-3 操纵面的质量平衡效应

事实上，主翼面的第一阶主弯曲振型并非纯弯曲型态，只是它的节线落在主翼面前缘的远前方而已。如果由于某种结构参数改变，使主翼面该振型节线向着前缘后移，从而使该振型变成越来越像以扭转为主的型态，则配重的有利效应将随之减弱。

图 7-4 所示为一个配重设计失效的例子，对于图中平尾应用了所谓的“角式集中配重”的升降舵，由于估计错误，首先出现的颤振模态中涉及平尾的危险振型是主扭转型的，其振型节线落在集中配重之后，因此当平尾绕该节线扭转振动时，集中配重所产生的惯性力与升降舵其它结构所产生的惯性力，二者反向，它们对铰链轴产生的力矩不是反向互相抵消，而是同向互相增补，这也就是说该集中配重不但不起解耦作用，反而增强了平尾主翼面主扭振型与升降舵旋转两种模态的耦合。

前面已经说过，质量平衡是基于“模态解耦”原则的防颤措施，另一个防颤原则是“频率分离”原则。经验表明，若操纵面的旋转频率高于主翼面颤振危险振型的频率，高出一定倍数，则操纵面型的颤振不会出现（或即使出现，但其颤振速度也远大于设计飞行速度，而不予以考虑）。

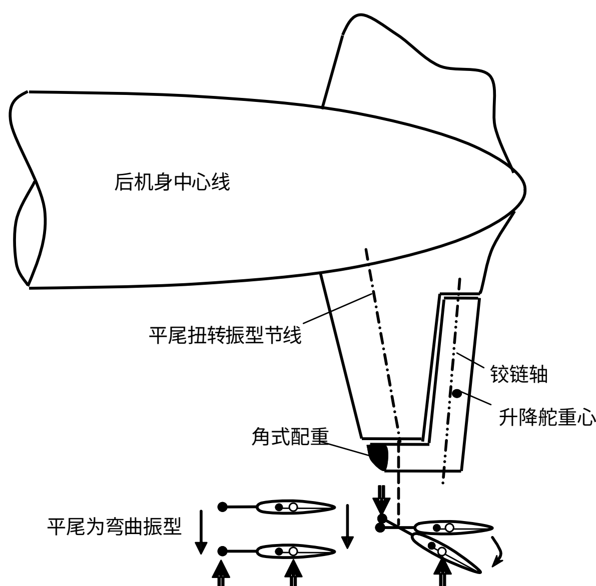


图 7-4 配重设计失效的例子

这一条件，对于动力操纵系统容易达到，但增加配重往往会降低操纵面旋转频率，使上述频率条件得不到满足。因此，对于所设计的操纵面构型，如果主要是采用足够高操纵回路刚度的设计意图的话，再采用配重（质量平衡）设计措施来提高该构型的颤振临界速度往往就是不适宜的措施。

在设计阶段中，通常很难通过计算或风洞试验准确预计操纵面颤振，幸好，由于结构特性中存在的一些非线性因素，这种颤振一般不是急剧扩大型的，而是一种限幅的持续振荡。

图 7-5 中的照片，显示一架美国 E-6A 型通讯中继飞机在飞行试验中因发生颤振而出现的损伤情况。该机的垂尾/方向舵两次在颤振试飞中振毁，而飞机仍然安全返航。第一次事故中，发生的可能是调整片—方向舵—垂尾型颤振，第二次飞行试验之前，把调整片铰链阻尼增加到了原来的两倍。但第二次飞行试验中却与预期的效果相反，仍发生了该型颤振，且颤振速度比第一次的还低。这个例子说明操纵面颤振的复杂性（阻尼会对它产生不利效应），但也说明了操纵面颤振不一定是机翼弯扭型颤振那样灾难性的，机翼弯扭颤振注定导致机毁人亡。

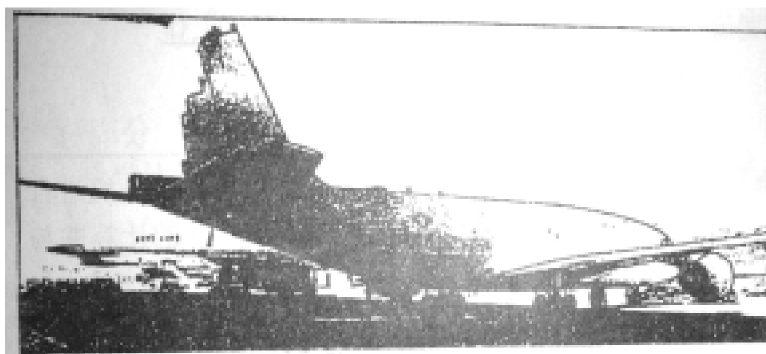


图 7-5 发生了操纵面颤振的 E－6A 飞机

图 7-6 是另一个操纵面颤振设计实例。设计阶段估计的颤振模态是后机身扭转与方向舵偏转耦合型的（图 7-6b）。由于结构的某些修改，试飞时发生的颤振模态是垂尾弯曲与方向舵偏转耦合型的（图 7-6c）。由图 7-6c 可以看出原先设计安置的角式集中配重不但不起解耦作用，反而起加强两个危险模态耦合的作用。在试飞后，采取的修改措施是把一个配重改为两个配重（如图 7-6d 所示），分别安置于方向舵的根、梢两处，结果不再发生该型颤振。

尽可能采用分布式配重（不用集中式配重）也是防颤振设计的一个半经验准则。

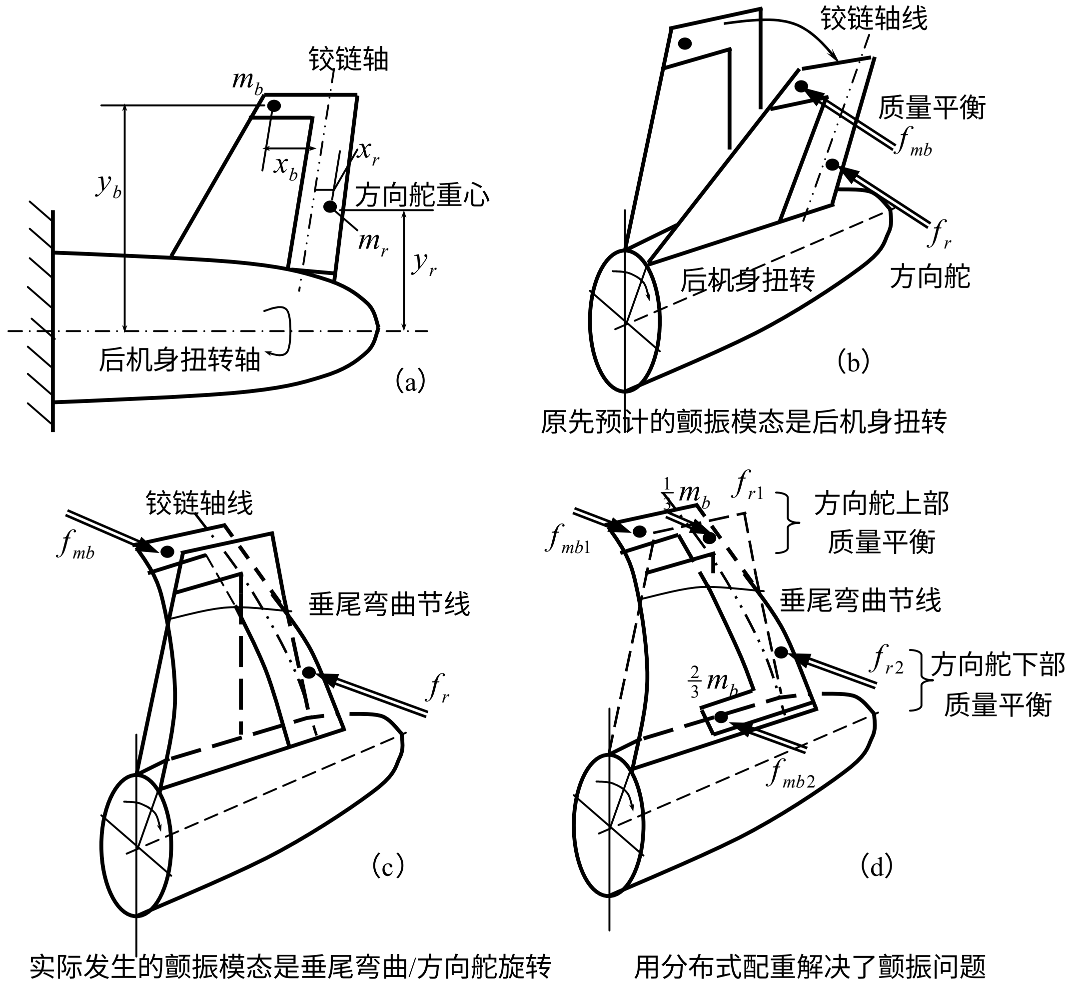


图 7-6 操纵面防颤振设计实例

第八章　防颤振设计的一般步骤及强度规范

§ 8.1 飞机防颤振设计的一般步骤

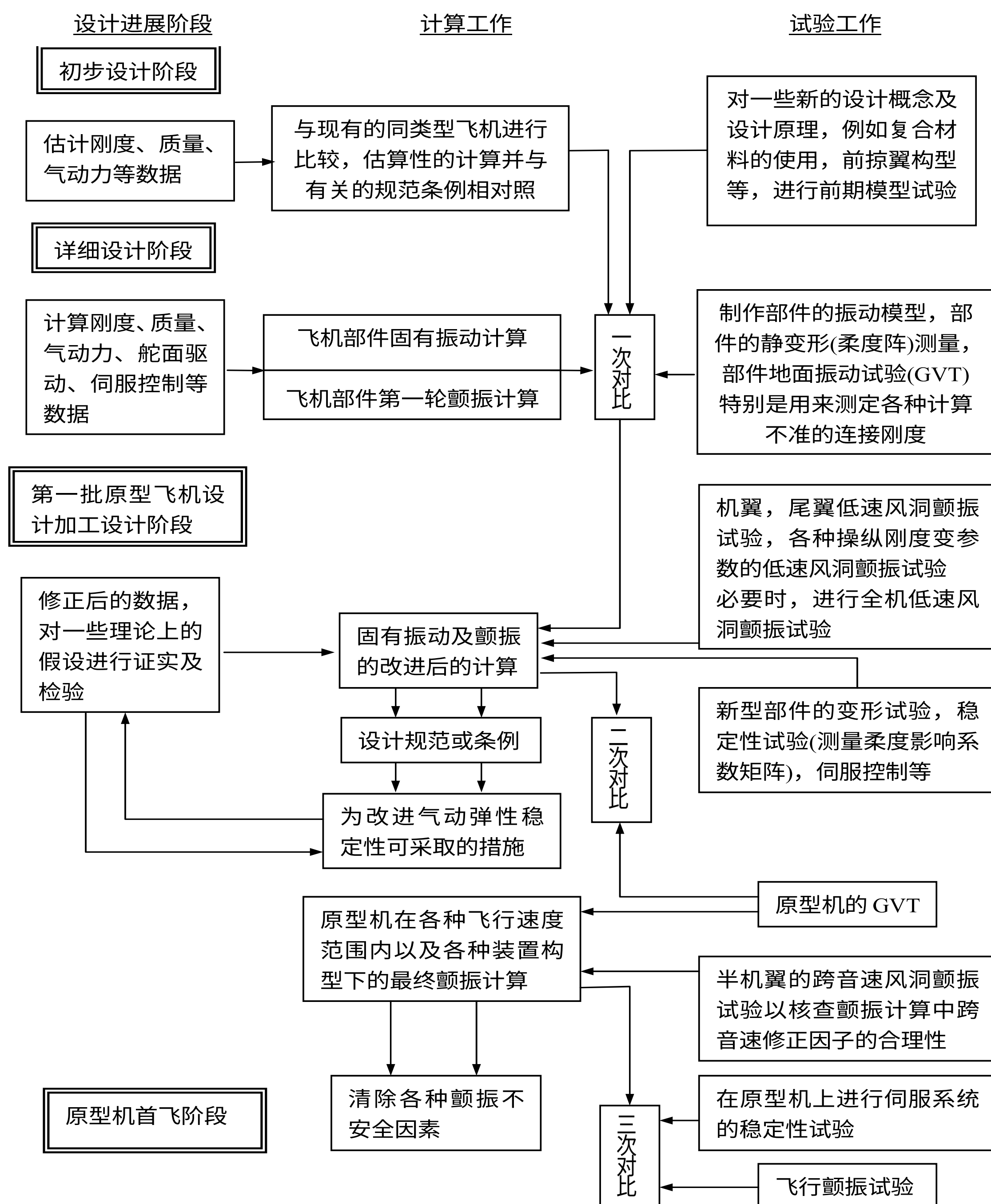


图 8-1 防颤振设计一般步骤

图 8-1 用流程图形式表明在飞机设计过程中，针对颤振问题所应进行的计算及试验工作。该图只是说明一般的情况以供参考。具体某一型号飞机设计工作中，颤振计算与试验的内容与时间安排，还将视该型号设计任务的紧迫程度，是否有足够相近的原型机可以借鉴等情况，而使颤振设计工作有所增减。例如对于带翼吊构型发动机的民用客机，发动机的展向、弦向位置以及吊舱联接刚度都是颤振敏感参数或导致颤振特性突变的因素，因此与此有关的计算，尤其是低速风洞颤振试验，都应及早加以考虑。总之，颤振设计是一项安全保证的任务，它应该与结构设计的进展齐头并进，结构设计每有一个重大改变，颤振分析（计算与试验）都应该重新启动，随之而行；力图避免当原型机已经制造出来时，由于颤振不安全而影响设计定型工作。

§ 8.2 飞机强度规范中有关防颤振设计的条款

前面几章讲述了颤振速度的计算方法。对于飞机设计工作来说，还有一个重要问题就是，估计出颤振速度后，如何运用这个数据来指导飞机设计，这就需要联系到飞机设计的强度规范。

飞机强度规范（或民用飞机的适航性条例）是国家制定的飞机设计的指令性或指导性的文件，是飞机设计时应遵守的法则，各航空工业大国都有自己的强度规范。

我国于 1985 年 12 月发布了中华人民共和国国家军用标准——《军用飞机强度和刚度规范》，为使用方便，采用分册编写形式。其中第七分册《气动弹性不稳定性》（代号 GJB67.7-85）就是专门针对飞机气动弹性问题中的颤振、发散等问题制定的设计规范。

对于民用飞机，我国执行的是中国民用航空总局颁布的《运输类飞机适航标准》（CCAR-25）和《正常类、实用类、特技类和通勤类飞机适航规定》（CCAR-23），其中也有关于颤振和发散等问题的条款。

美国的军用飞机设计中使用的是美国军用规范——《飞机强度和刚度》，代号 MIL-A-8860 系列（1960 年发布）。《飞机结构通用规范》，代号 MIL-A-87221（1985 年发布）以及《飞机强度和刚度》，代号 MIL-A-8860B（AS）系列（1987 年发布）。同时针对民用飞机设计则有《联邦航空条例》（FAR），其中 FAR-23 部是轻型通用类飞机适航性标准。FAR-25 部则是运输类飞机适航性标准。近年来又发布了新版本的规范。

俄国（前苏联）一直把飞机强度规范作为内部文件。前苏联于 1953 年出版了《飞机强度规范》（即《飞机强度设计指南》），1961 年，前苏联将飞机强度规范分为军用、民用两大类。自 1974 年开始先后颁布了第 1 部至第 4 部《适航性规范》并逐年发展和修订，但都没有对外国公开，军用飞机规范方面就更讳莫如深，一直视为秘密文件。

规范的内容一般是提出一些设计要求，以及为满足这些要求所应该进行的工作，即“验证要求”（计算与试验）。对于具体如何作这些工作，采用什么方法，规范中不作具体规定。美国的 MIL-A-87221 对于应做哪一些工作，更少提及。可能是由于美国各飞机制造公司自己都有很强的研究技术力量，因此规范不作具体规定，可避免限制各公司的积极性，让他们在

投标某一设计项目时各显神通。

飞机强度规范大都带有附件性质的出版物，例如我国配合《军用飞机强度和刚度规范》还出版了一本厚达 556 页的《使用说明》，其作用是为了解释规范的基本内容和编写依据，可供从事飞机订货、设计和验证的工程技术人员参考使用。美国的 MIL-A-87221 全书共 444 页，规范正文只有 56 页，而附录（小标题为“ 飞机结构手册 ”）则有 388 页，占全书的 87%。该规范正文对各类问题分第 3“ 要求 ”及第 4“ 验证 ”两部分提出意见，例如在 3.7.1 气动弹性条款中 a.项提出：“机体结构不得发生颤振”，在 4.7.1 气动弹性条款中，则提出：“ 计算及试验应能证实机体结构能符合 3.7.1 的要求 ”。其附录中则对规范的正文中那些有必要进行解释的条款按“ 提出的理由 ”，“ 指导性建议 ”，“ 经验教训 ” 三方面分别做出解释。

我国的《军用飞机强度和刚度规范》第七分册《气动弹性不稳定性》(GJB67.7-85）的正文包括两方面内容：

1.在飞机设计、制造过程中防止颤振、发散及其他气动弹性不稳定性的要求。

2.为保证达到上述要求（即不发生颤振等）所需进行的计算及试验工作，这就是第二章《要求》及第三章《质量保证规定》两部分。

在该分册第二章的 2.1 节《一般要求》中提出颤振的安全系数为 1.15，正文中提出：“ ……飞行速度直到 1.15 倍极限速度 V_{jx} 都不应发生颤振…… ”。接着提出，计算或试验应证明满足最低要求的颤振余量及要求的阻尼（衰减率）：

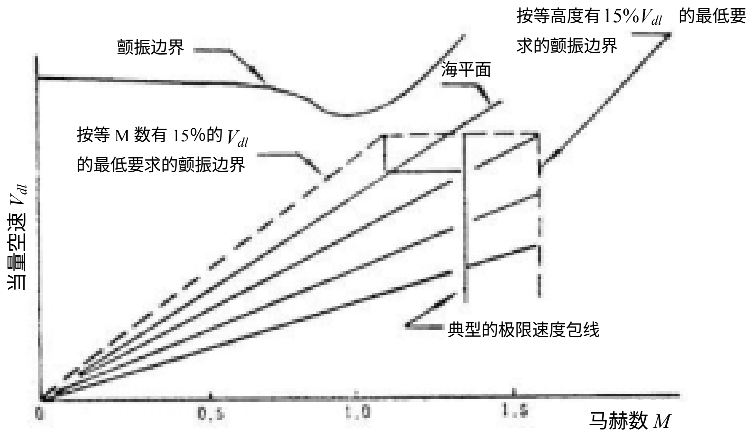


图 8-2 最低要求的颤振余量图示

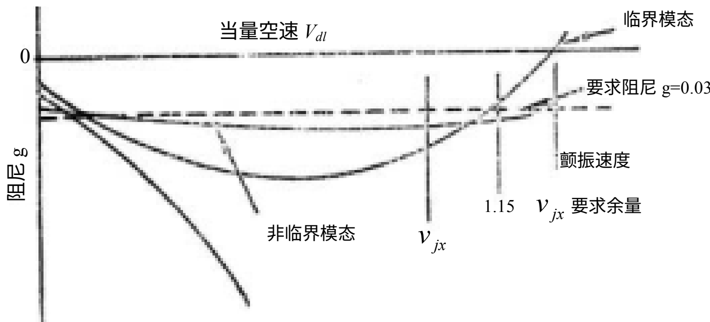


图 8-3 所要求阻尼的图示

a．在等马赫数和等高度线上所求得的飞机极限速度包线的所有点上，提高 15%当量空速不会发生颤振、发散、嗡鸣以及气动热弹性、气动伺服弹性和其它动态气动弹性不稳定现象（见图 8-2）。

b．在所有高度上，飞行速度直到极限速度V_{jx}，任何危险颤振模态的阻尼系数g至少应为 0.03（见图 8-3）。

在《军用飞机强度和刚度规范》第七分册《气动弹性不稳定性》的《使用说明》中，对上述安全系数（颤振余量）作说明时，推荐了两种证明阻尼（衰减率）是否满足规范要求的方法（见图 8-4a，8-4b）。图 8-4 中所有的$V-g$曲线，就是颤振计算的结果。

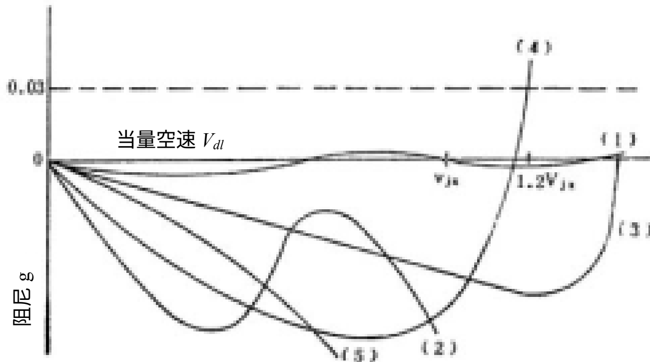


图 8-4a 阻尼－速度曲线

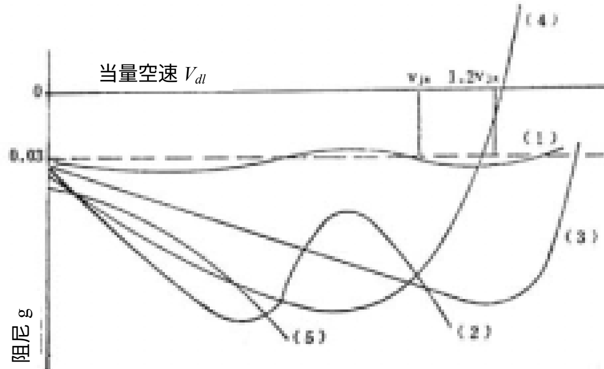


图 8-4b 阻尼－速度曲线

在该分册第二章的 2.2 节《详细设计要求》中除对主翼面（机翼，尾翼等）的颤振设计提出要求外，还从以下七个方面提出设计要求，即

2.2.1 增稳系统，它与“气动伺服弹性”有关。

2.2.2 破损安全稳定性。是指某些部件破损后，对颤振速度的设计要求可降低到什么程度。

2.2.3 旋转颤振。这是涡桨飞机（或桨扇飞机）的一种特殊颤振现象。（美国两架四发涡桨飞机 L-188 的破坏失事才使这一问题得到关注。通常在涡桨发动机支架有破损，刚度显著下降时，就可能发生该现象。）

2.2.4 外挂物。机翼带翼下外挂物（副油箱，武器或发动机等）后，往往使颤振速度大幅

度下降，是飞机设计中阻碍颤振设计过关的常见因素之一。

2.2.5 壁板颤振。通常是暴露于超音速气流中壁板的一种持续振荡，导致疲劳破坏等问题。

2.3.6 变几何形状飞机。例如变后掠翼飞机，目前很少采用，随着先进的变体飞机概念的兴起，这一问题受到重视

2.3.7 操纵面及调整片。其中提及“ 嗡鸣 ”等特殊问题。

在本讲义的第九章，将就规范提到的《外挂物》，《操纵面嗡鸣》，《全动尾面颤振》问题作一些讲述，并对抖振、T 型尾翼颤振等问题也作简要介绍。

如果把机翼、尾翼等主翼面的弯扭耦合颤振称为经典颤振问题，则上述提到的问题可归属为非经典颤振问题。

第九章　非经典颤振问题及抖振

§ 9.1 带外挂物机翼的颤振分析

对于民用飞机来说，机翼外挂物是指翼吊式发动机，而对军用飞机，则还包括各类外挂式武器如导弹、炸弹、火箭等。机翼带外挂物后，往往会使机翼颤振速度大幅度降低，这不仅对于新设计飞机有较大影响，对于现役军用飞机，由于在其使用寿命期限内，武器会有更快的更新，若装备新式武器，任何改型飞机都必须认真重新考虑其颤振排除问题。

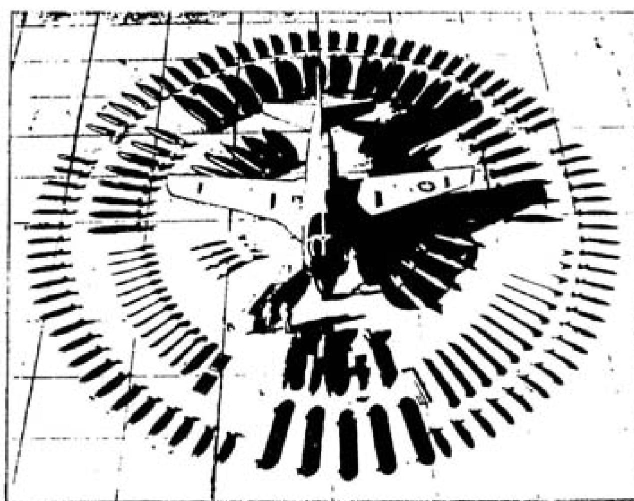


图 9-1 某攻击机的外挂配置

军用飞机携带武器的种类和方案（称为外挂构型）很多，图 9-1 是一种舰载攻击机的外挂构型的可能变化。因此机翼/外挂颤振设计的工作量非常大，这种颤振之所以困扰设计人员，不仅是由于分析工作量巨大，更因为它对一些几何、物理参数的高度敏感性，即某一参数的微小改变会带来颤振速度的急剧变化。美国军机规范 MIL-A-87221 的附录中，介绍了一些机翼/外挂颤振事故，其中提到，机翼/外挂颤振速度对外挂物弦向安装位置的敏感性，迫使设计人员在分析中，连制造与安装时的容差都要考虑在内。

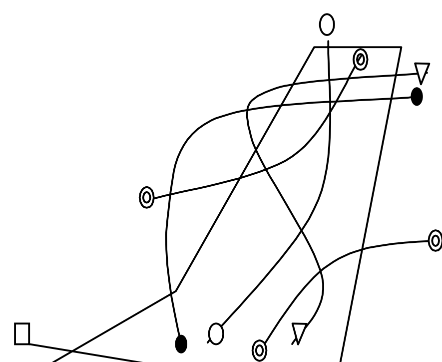
外挂物大都是一些成品，它的惯性数据是无可选择的，但它与机翼的联接刚度却是一个无法用理论公式精确计算出来的参数，而且在使用过程中还会有所变化。因此，颤振设计时需要考虑对联接刚度作变参分析，使计算及试验能覆盖一定的联接刚度参数范围，这当然也加大了设计分析的工作量。现在的颤振计算都是应用现成的商业软件由计算机自动完成的，但设计人员最好能具备一定工程颤振设计的观点，否则在机翼/外挂的颤振设计中，当计算结果表明颤振不能过关时，会发现自己陷入一大堆计算结果中，无所适从，不知从何处着手来解决颤振问题。

表 9-1 光机翼固有频率

□	一弯	8.5Hz
●	二弯	21.8Hz
○	一扭	34.9Hz
▽	三弯	54.1Hz
◎	二扭	64.1Hz

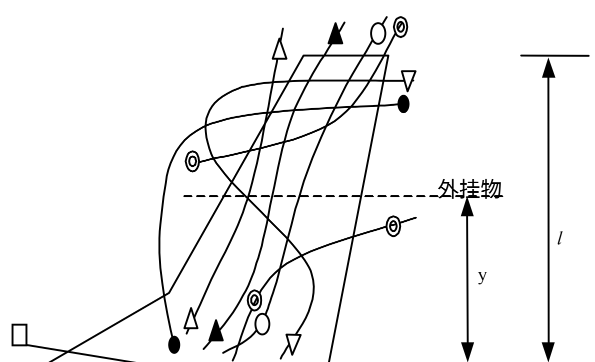
表 9-2 带外挂机翼固有频率

□	一弯	5.2Hz
△	外挂物平移	8.9Hz
○	一扭	9.9Hz
▲	外挂物偏航	13.9Hz
●	二弯	20.3Hz
▽	三弯	33.9Hz
◎	二扭	50.3Hz



颤振速度＝V_{Fo}

颤振模态（二弯/一扭）



颤振速度＝$V_F / V_{Fo} = 0.66$

颤振模态（二弯/外挂偏航）

图 9-2 光机翼与带外挂机翼的固有振型

经典弯扭耦合型颤振的基本物理机制是：两种变形模态的耦合，形成一种能量转换器，将直流的能量转变成交变的形式，使结构产生自激振动。因此，对于防止颤振，可提出如下两条原则：一是使各变形模态尽可能解除耦合（质量平衡/质量重新分布）；二是尽可能使与颤振耦合有关的两个主要模态的频率分离得越远越好。用这种“ 分离频率，解除耦合 ”的工程观点来看待机翼/外挂颤振也会有一定的启发。

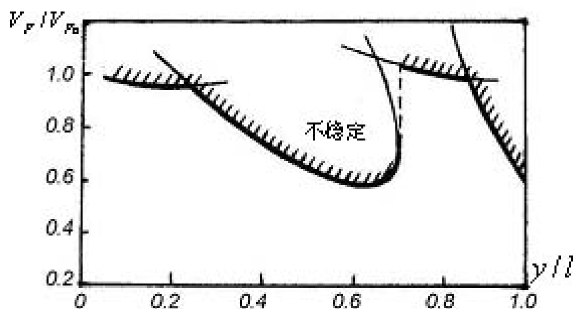


图 9-3 颤振速度随外挂物展向位置变化情况

外挂物是通过挂架与机翼弹性联接的（即使对于民航飞机的发动机挂架，其弹性也不可忽视），每个外挂物各有 6 个自由度。因此在机翼/外挂系统的振动特性中，每增加一个外挂

物，就会增加 6 个固有振型，通常垂直平移模态、弦向平移模态以及滚转模态都具较高的频率，不会参与到颤振危险模态的耦合中，但这样每个外挂还是会带来三个新的固有振型。

图 9-2 中给出了某光机翼的振型节线以及该机翼带一枚外挂导弹时的振型节线图。外挂物运动占主要地位的振型，称为主外挂物振型，简称为外挂振型，例如外挂偏航振型。本例中三个外挂振型就提供了更多的模态耦合机会，从而增加了机翼/外挂系统发生颤振的机会。

本例的外挂偏航振型中机翼的变形是以扭转为主，其频率 13.9Hz，比机翼第一阶扭转频率 9.9Hz 更为接近机翼二弯频率 20.3Hz，因此外挂偏航振型与机翼二弯振型在较低的速度下产生耦合而引发颤振，从而代替了原来光机翼的机翼二弯/机翼一扭型颤振模态。

机翼/外挂系统的固有频率分布往往是密集型的，特别是多外挂构型，例如左右机翼各带两枚导弹（或四发民用客机）的外挂振型中，有一个内、外侧两个外挂同方向偏航振型及一个内、外侧外挂反方向偏航振型，这两个振型的频率往往非常接近。同样的是外挂侧向平移振型，内外侧同向运动的振型与反向运动的振型频率也非常接近。这种密频特性给地面振动试验（GVT）中振型辨识带来困难；而且使机翼/外挂系统产生新的具有较低临界速度的颤振模态具有更多的可能性（所谓颤振模态就是看由哪几个振型耦合产生该颤振状态，前例中一个是二弯/一扭颤振模态，另一个则是二弯/外挂偏航模态）。如果两个近频振型中，一个是机翼弯曲为主一个是机翼扭转为主，那么它们耦合而发生颤振的临界速度就会比较低。近频振型还有一个特点是，当结构参数小变化时，振型会剧烈改变，这也是颤振速度产生突变的原因之一。突变的另一个原因就是上述颤振模态的改变，在变参分析的结果所给出的颤振速度随某参数变化的所谓颤振边界曲线上，曲线发生转折即突变。颤振边界曲线的突变也是颤振速度对参数敏感的一种表现。

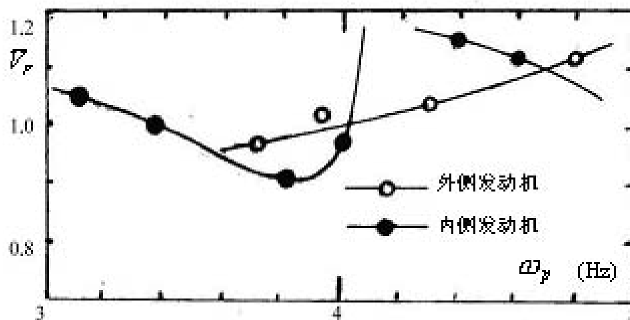


图 9-4 伊尔 96-300 的颤振速度随发动机挂架俯仰刚度变化情况

图 9-3 给出了上例机翼颤振速度 V_F 随外挂物展向位置（y/l）的变化情况，图中显示该机翼/外挂系统随 y/l 的改变，经历三次颤振模态的转变，有两种颤振模态还呈现出 V_F 急剧降低以及颤振消失现象。

机翼/外挂颤振敏感的几何参数有外挂的展向位置，弦向位置。敏感的物理参数有外挂联接刚度。图 9-4 给出伊尔 96-300 四发喷气客机颤振速度 V_F 随发动机挂架俯仰刚度变化的情

况。另外，机翼/外挂颤振计算的$V-g$图中常出现所谓“小阻尼”驼峰起伏式曲线，它都属于以外挂振型为主的颤振模态，有时这对判断它是否为临界情况带来困难。

§ 9.2 全动尾面的颤振分析

全动尾面颤振分析中，非定常气动力计算与一般主翼面没有差别，它的主要问题出在结构构型方面。通常采用较多的构型是由翼根可转动大轴安装于后机身的形式。转动大轴不可避免的具有间隙，这就给全动尾面旋转模态的支持刚度带来不确定因素。此外，驱动平尾的操纵系统也使支持刚度具有动刚度性质，这些因素使得全动尾面的颤振计算结果难以准确。而且飞机使用过程中，由于磨损和松动，上述间隙会产生变化。由于这些原因，颤振设计时不得不作变参数分析，使支持刚度覆盖一定范围。

由物理直觉上可以理解，间隙总是使刚度降低。如图 9-5 所示，当全动尾面的转动轴在间隙范围内作微幅振动（转动）时刚度等于零，这时可能发生颤振，振幅急剧扩大，当振动一旦扩大到超过间隙尺寸，立即遇到弹簧的约束，即系统具有一定的刚度，这会使对应的颤振速度提高而超过当前飞行速度，于是振动会衰减，但振动衰减到一旦小于间隙值，颤振又再度发生，最终的现象是转轴（及尾面结构）作一种持续的限幅振动，这种限幅振动在力学上称为极限环颤振。极限环颤振会带来结构的疲劳强度问题，

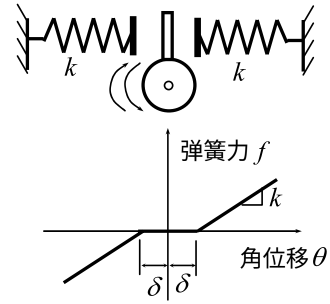


图 9-5 间隙非线性刚度

在计算机上用数值积分方法可以对带间隙的全动平尾进行颤振计算，对给定间隙算出整个振动的时间历程，最终得到限幅振动的振幅、频率等。较为简便的是用当量线化方法在频域分析带间隙全动平尾系统的颤振特性。

当量线化方法的原理是按照某种准则,把间隙这种非线性刚度当量化成为一个线性刚度，有一种准则是把平尾结构作简谐振动过程中，把周期变化的非线性弹性支反力展开成傅立叶级数，而仅考虑其一阶谐波。把这个支反力的基频简谐波和系统运动位移简谐波对比就得到一个当量线化刚度系数。这种作法又叫做谐波平衡法。

图 9-6 给出了谐波平衡法的运算过程。即先用谐波平衡法导出带间隙弹簧的当量化刚度系数k_{eq}：

当 $A<\delta \quad k_{eq}=0$

$$\text{当 } A\geq\delta \quad k_{eq}=k-\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\delta}{A}+\frac{\delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\delta}{A}\right)^2}\,\right] \tag{9.1}$$

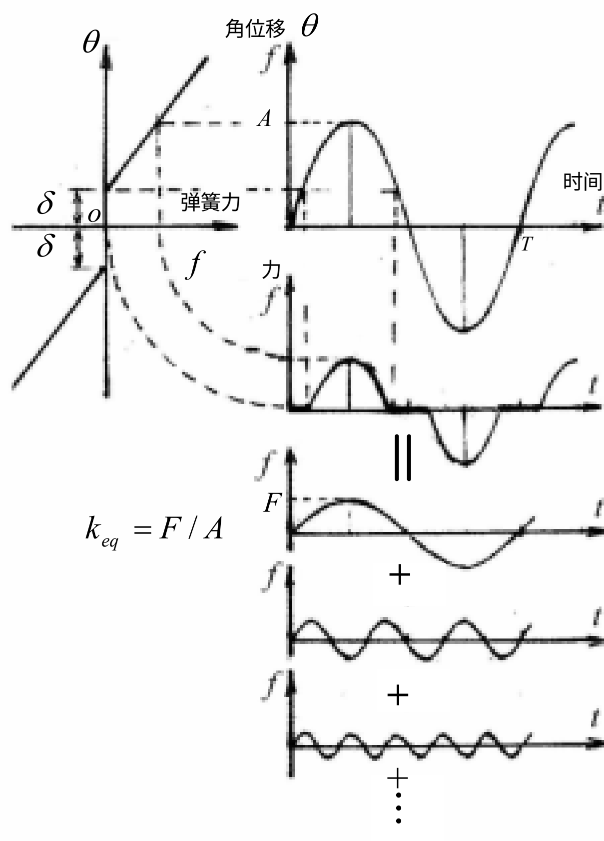


图 9-6 谐波平衡法分析过程示意图

由此可见，当量刚度系数 k_{eq} 的数值取决于振幅 A 的大小，而振幅在计算中事先是未知数。这样，就使得引用当量线化刚度后的颤振计算带有迭代性质。对此，可用前面讲述的任何方法，计算不同 k_{eq} 值下全动平尾的颤振速度 V_F，得到 $V_F \sim K_{eq}$ 曲线（图 9-7），同时作出 $k_{eq} \sim A$ 曲线，配合使用这两条曲线，就可得到限幅颤振的振幅与颤振速度的关系曲线。对于图 9-7 的例子，有间隙弹簧相应于全动尾面的扭转（转动）刚度，弯曲刚度系数是一个固定值，颤振速度 V_F 随扭/弯刚度比的变化情况是：当扭/弯刚度比接近 1 时，V_F 最小，而扭/弯刚度比大于 1 或小于 1，V_F 都有所增加，当扭/弯刚度比趋于 0 时，V_F 趋于无穷大。

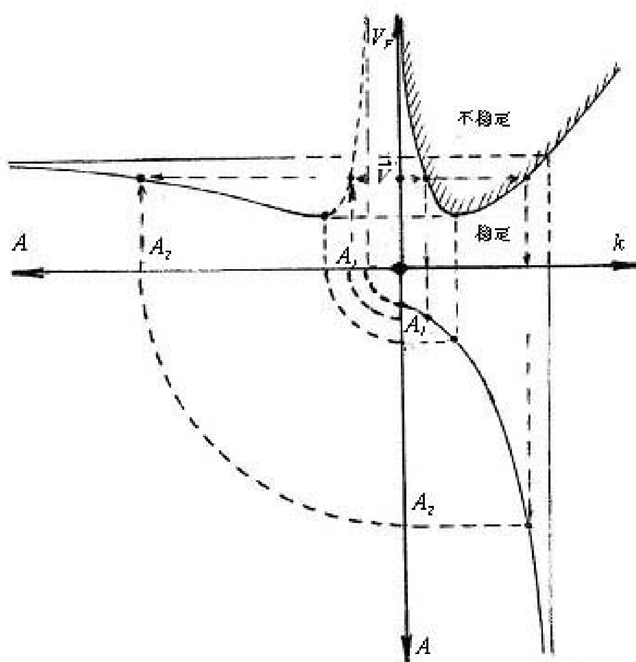


图 9-7 极限环颤振图解分析过程

图 9-7 的图解分析过程，是为了考察在某一个飞行速度 $\bar{V}$ 下，机翼发生极限环颤振的情况，在 $V_F \sim k$ 图中作水平线与 $V_F \sim k$ 曲线相交两点，由此两点分别作两条垂直线，找到相应的两个 k 值，继续将这两条垂线延伸下去，与 $k \sim A$ 曲线各有一个交点，由此再作水平线，就找到两个对应的振幅值 A_1 及 A_2。把它们转化到左侧的 $V_F \sim k$ 分图上，就得到该曲线上的两个点，这表明在飞行速度 $\bar{V}$ 下，该翼面会有两种限幅颤振，一种颤振的振幅是 A_1，另一种颤振的振幅是 A_2。

我们来进一步考查这两种限幅颤振的稳定性。在 A_1 处，若有小扰动使振幅由 A_1 增大到 $A_1 + \Delta A_1$，这时综合右侧 $V_F \sim k$ 分图和 $k \sim A$ 分图可见 k_{eq} 会增大，却导致了 V_F 的下降，这也就是说当前飞行速度已超过颤振速度，于是会发生颤振而振幅由 $A_1 + \Delta A_1$ 继续扩大；反之若 A_1 减小到 $A_1 - \Delta A_1$，则颤振速度会提高而大于当前飞行速度，故振幅会继续减小。这就说明 A_1 点是一个不稳定的限幅颤振点，在实际中是不存在的。同样可以证明，A_2 点代表的是一个稳定极限环。如果由疲劳强度的观点来考虑，限幅振动的幅值不得超过 A_{cr}，那么根据 A_{cr} 值，由 $V_F \sim A$ 分图就可找出对应的限幅颤振速度 V_F，按规范要求，此值应该大于 1.15 倍的飞机极限速度（例如俯冲速度）。

以上介绍的是考虑全动尾面间隙时的颤振特性估算方法。

如果事实表明，摩擦对全动尾面颤振的影响必须考虑，同时带有间隙和摩擦的非线性称为迟滞非线性，也可用当量线化方法进行处理，此时，除计算出当量刚度系数之外，还要计算出当量阻尼系数。

全动尾面的液压操纵系统的动力学特性（刚度、阻尼）往往通过试验来测定，然后应用

到上述的颤振计算分析中。

§ 9.3 T 型尾翼的颤振分析

T 型尾翼简称 T 尾，在通常在大型运输机设计中采用这种尾翼构型。在少数民航机设计中也有采用的例子。图 9-8 所示就是一架采用 T 尾布局的支线客机。T 尾布局的结构特点是垂尾的运动及位形改变与平尾是紧密耦合的。T 尾的颤振计算与常规尾翼的颤振计算最主要的不同之处，就是在计算非定常气动力时要计及一些定常参数的作用，例如平尾的上反角以及静升力等，这些参数在经典颤振计算中是无需考虑的。

对于图 9－8 所示的 T 型尾翼飞机，其平尾好像是垂尾的一个非常重的翼梢外挂物，使得垂尾的固有频率降低，同时平尾又好像是垂尾的一个翼梢挡板，提高了垂尾翼梢的气动力载荷，从而对颤振产生不利影响。T 尾颤振的基本机制是垂尾第一阶弯曲与第一阶扭转模态相耦合而发生颤振，颤振速度一般比较低。

设计经验及研究结果表明 T 型尾翼的平尾上反角及其静升力 L_o 是对颤振有重要影响的参数。上反角对 T 型尾翼结构的振动特性及气动特性都有影响。零上反角时，在平尾上由两方面因素来产生滚转气动力矩。一方面，当 T 尾偏航（或垂尾扭转）时，垂尾相对于气流有一攻角，其左右两侧产生压差，这样就使得左半平尾升力提高，右半平尾升力减低（或相反），从而产生一滚转力矩。另一方面，垂尾弯曲时，使处于其翼梢处的平尾发生侧滑，这种运动和平尾静升力相组合又会产生附加的滚转力矩。如增加上反角，则垂尾的偏航运动会导致平尾产生反对称攻角，进一步引入附加滚转力矩。垂尾变形模态的相位致使上述平尾滚转力矩系数的导数 C_{mx}^{β} 是减稳的。因此设计中常采用负的上反角以减小这个气动力矩系数导数，从而达到提高 T 型尾翼颤振临界速度的目的。

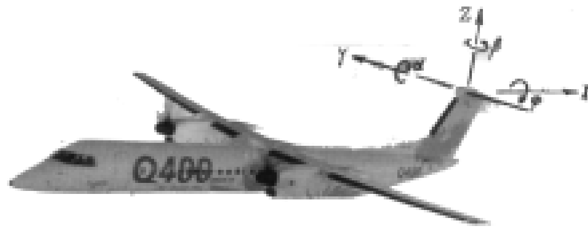


图 9-8 具有 T 型尾翼布局的飞机

平尾静升力的作用，可说明如下，考虑图 9-9 所示 T 尾的二自由度运动：平尾滚转 $\phi(t)$ 及垂尾弯曲 $\eta(t)$。滚转使平尾静升力 L_o 改变方向，从而在 η 方向上有一个等于 $-L_o\phi(t)$ 的分量。η 自由度上的广义气动力 Q_η 是按仅有虚位移 $\delta\eta$ 时，气动力所做功 $\delta\overline{W}$ 导出的。对于 T 尾，该虚功 $\delta\overline{W}$ 必须包括（$-L_o\phi(t)\delta\eta$）这一成份，这就是说在广义气动力 Q_η 中，平尾静升力 $L_o\phi(t)$ 的成份必须计入。至于平尾上的非定常升力 $L_\phi\phi(t)$，由于滚转运动 $\phi(t)$，它在 η 方向上的分量是 $(L_\phi\phi)\phi = L_\phi\phi^2$，在颤振分析中的微幅振动假设条件下，该分量的数量级属二阶微量，可略去不计。

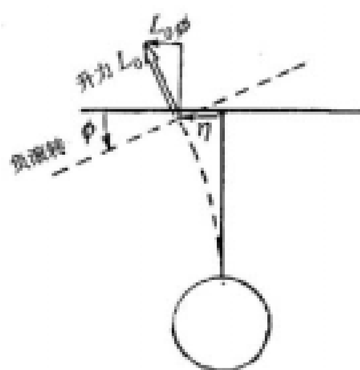


图 9-9 平尾静升力的作用示意图

此外，平尾静升力 L_0 乘以其它某些运动因子，例如 $\dot{\eta}(t)$ ，还会产生一些附加非定常气动力，这些问题在参考文献[3]中都有所说明。

图 9-10～9-11，给出了 T 型尾翼的平尾上反角及平尾静升力 L_0 对 T 型尾翼颤振速度的影响，均取自参考文献[3]。

上述关于计及一些定常参数的 T 型尾翼颤振分析，一般商业软件中都不涉及，故需要自行编制程序计算。

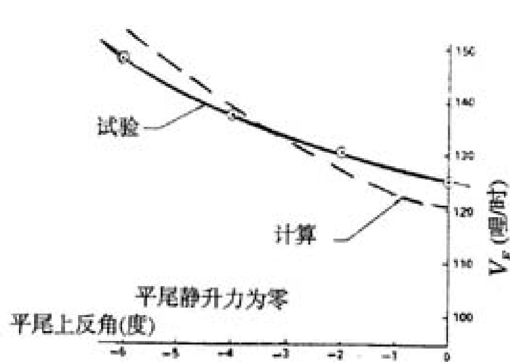


图 9-10 平尾上反角对 T 尾颤振速度的影响

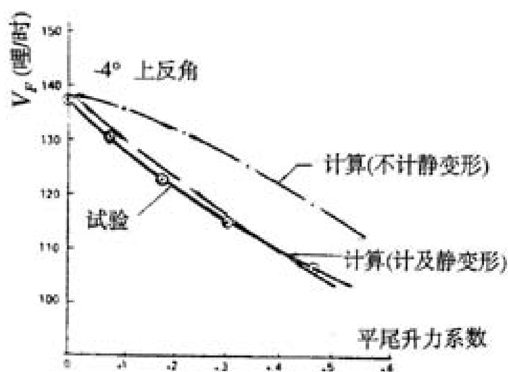


图 9-11 平尾静升力对 T 尾颤振速度的影响

§ 9.4 操纵面的嗡鸣

在跨音速及低超音速飞行时，有时操纵面会产生一种自激振荡，称为嗡鸣，嗡鸣本质上是一种单自由度的颤振，所涉及的单一自由度是操纵面的旋转自由度。最早发现嗡鸣现象是在副翼上，因此过去常称之为副翼嗡鸣。嗡鸣的本质特征与基于多模态耦合的经典弯/扭型颤振完全不同。激波及流动分离在嗡鸣现象中起重要的作用。操纵面的振荡引起翼面激波前后振荡，这又反过来使得操纵面产生压力脉动，从而激发操纵面处于一种持续限幅振荡状态，嗡鸣具有比常规弯/扭耦合颤振高得多的振荡频率。

发生嗡鸣时机翼上气流的流动状态有几种不同类型，而且对每一种类型，其产生的机理

也不相同，因为嗡鸣的发生和激波形成有关，所以嗡鸣主要取决于马赫数，而不取决于飞行速度。与激波形成过程相关的嗡鸣至少有三种类型，如图 9-12 所示，基于激波在主翼面上的位置及相应气动力作用而有所不同，它们是

a．第一类型：飞行速度范围，$0.75 \le M_\infty \le 0.9$（$M_\infty$代表前方来流马赫数）

当机翼迎角较小时，激波诱导分离同时出现在机翼上、下表面，激波流动图形如图 9-12 a 所示，若迎角较大，则只出现在上表面，激波的位置在主翼面上，嗡鸣时，舵面的振荡和激波的前后移动相耦合，但这时，激波前后移动也不扩展到舵面上。



图 9-12a　第一类嗡鸣

b．第二类型：飞行速度范围，$0.9 \le M_\infty \le 1.0$

随马赫数的增大，局部超音速区向后扩大到舵的表面上，流动图形如图 9-12 b 所示。舵面的振荡又和激波前后振荡耦合而发生嗡鸣。这种类型的嗡鸣与第一类嗡鸣相比，除激波位置不同外，振动的特性也不一样。发生第一类嗡鸣时，舵面振动是近似简谐的，而第二类嗡鸣的舵面振动只是周期的而不是简谐的，这可能与操纵面铰链力矩曲线的非线性有关。

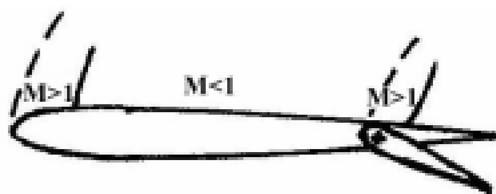


图 9-12b　第二类嗡鸣

c．第三类型：飞行速度范围，M_∞>1.0

当马赫数继续增大到大于 1.0 以后，激波将后移到舵面的后缘，其流动图形如图 9-12 c 所示。这时，舵面又会发生嗡鸣。这种嗡鸣与后缘激波随操纵面振动而诱发负气动阻尼力矩有关。

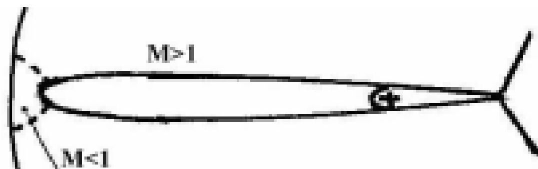


图 9-12c　第三类嗡鸣

由于嗡鸣涉及激波和边界层相互作用，气动力情况复杂，近年来，国内外才有一些学者利用基于 $N-S$ 方程建立的程序在计算机上对跨音速嗡鸣进行仿真研究。长期以来，飞机设计中对于嗡鸣只能依靠一些经验数据来进行预计。

工程中对防止嗡鸣有以下一些建议：

应用装置简单又具足够分量的机械性阻尼（例如使用碰撞小球体的碰撞阻尼器）来抵消负气动阻尼。

提高操纵面转动频率，例如使操纵面操纵通路具有高的刚度，或使操纵面绕铰链轴具有小的转动惯量，或者两者同时并用。嗡鸣对质量平衡不敏感。

在气动外形设计方面，采用有大后掠角的铰链轴线、展弦比小的升力面、有利的翼剖面形式以及操纵面采用粗钝后缘或其它方式修改的后缘以减弱激波强度。这些都对防止嗡鸣有一定好处。

防嗡鸣设计的经验公式是基于操纵面转动频率的下限提出的判据，即操纵面转动频率必须符合

$$\omega \geq C_{BP} \frac{a}{b}(rad/\sec) \tag{9.2}$$

其中　$a =$ 飞行高度上的音速 $(m/\sec)$

$b =$ 操纵面 $\frac{3}{4}$ 半展长处的半弦长。

无量纲的防止嗡鸣系数 C_{BP} 根据各种资料来源有所不同，美国波音公司资深专家推荐值为 $C_{BP} = 0.21$。其它公司采用的系数值大体上在 $0.2 < C_{BP} < 0.36$ 的范围内变化。

§ 9.5 失速颤振

失速颤振是一种升力面颤振，但在这种颤振的每一个振动循环中，至少有一部分时间内机翼剖面处于失速气流中。除飞行器的固定升力面外，压缩器叶片、涡轮叶片、旋翼桨叶等更容易发生失速颤振。它和升力面的经典颤振不同，一般它的发生既不取决于惯性、弹性或气动耦合，也不取决于运动和它引起的气动力间的相位差。失速颤振的主要特点是运动引起的气动力非线性。因为失速颤振振幅往往很大，所以研究时必须考虑非线性的影响。而受到气动力非线性的影响，失速颤振的振幅往往是限幅的极限环振动。

失速颤振对于直升机旋翼桨叶的设计具有实际意义。例如，对于旋翼桨叶振动，当迎角增大到失速区时，便会出现失速颤振。此时的颤振有如下特点：颤振速度激烈下降，颤振频率逐渐增加且趋近于桨叶在静止空气中的扭转自振频率，振动模态中扭转振动占主要成分。当桨叶完全失速后，颤振速度又逐渐回升。当升力面从经典颤振转到失速颤振时，会发生大的相位移动，弯、扭振动的相位差减少大约 45°，有时甚至完全消失。质量平衡对其影响很小，甚至在过平衡时也会发生失速颤振。

由于失速颤振是频率为扭转自振频率的扭转为主的振动，因而增大扭转自振频率可以提高失速颤振速度。采用可以使失速推迟的翼剖面也有助于改善失速颤振特性。

§ 9.6 抖振

抖振与颤振不同，它不是自激振动，而属于强迫振动。它是当翼面处于某种非定常脉动

扰流中受到激励而产生的随机振动响应。飞机设计中气动力方面的技术人员关心的是抖振的始发，这是从它影响操纵稳定安全的角度来考虑的。结构强度方面的技术人员则关心抖振带来的结构损伤。气动力抖振分析中通常只考虑刚体翼面情况。气动弹性抖振则涉及结构/流体耦合效应。

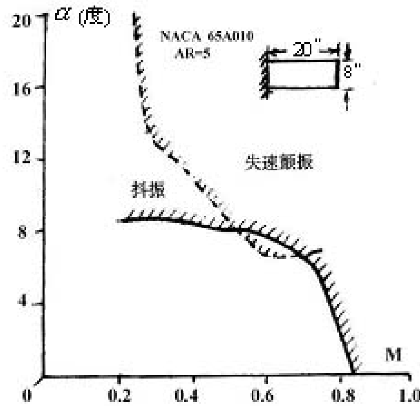


图 9-13 某机翼模型的抖振边界示意图

使机翼发生抖振的激振力是气流分离引起的。当翼面攻角太大时，会发生失速及流动分离，由于分离流的紊流激励，机翼本身或处于机翼尾流中的尾翼会产生剧烈的随机振动响应，这种抖振，可称之为大攻角抖振。

另一种抖振是在跨音速飞行范围内，翼面激波引起气流分离而产生的，可称为激波抖振。

如果升力面（一般是位于下游的尾翼）落入某种不良气动外形的物体的尾流中（例如空中预警机在机身背部装置的圆盘形雷达天线罩，或机身前方的一些凸起物，空中飞行时放下的襟翼等等），也会发生抖振。

抖振始发可用某种响应指标的突然增大来标识（例如该指标可以取翼根弯矩的均方值）。将该指标值随着攻角增大或飞行马赫数增大而变化的情况记录下来，当该指标发生突然增大时，就认作抖振发生点。但更直接的办法是直接记录有关的振动数据来判断抖振，抖振基本上是靠风洞试验或试飞研究来确定的。

图 9-13 是一个长方形悬臂机翼模型在风洞中的抖振测试结果。该图中的所谓抖振边界，是将试验中获得的发生抖振时的攻角（也可以是升力系数 C_L）和马赫数记作一个抖振点，由这类抖振点联成曲线，称为抖振边界。曲线左半段（$M < 0.6$）左右）是大攻角抖振，右半段则是激波抖振。图中还有一条失速颤振边界曲线，上一节已经介绍过，失速颤振是失速后发生的一种非经典型颤振，它涉及非线性的非定常气动力与翼面弯扭变形耦合。图 9-14 给出风洞试验中记录下的模型机翼翼根弯曲及扭转两种变形振动的时间历程。图中上方的抖振记录是最经常遇到的抖振情况：即带有随机性质的机翼一弯模态响应占优，而扭转模态所受

到的激励则很小。图中下方的时间历程记录所取的试验状态，比刚才的那一个状态的攻角稍大，这个记录中，一弯模态的记录与前一个大体相同，但扭转变形传感器拾取的讯号，

则显示出一条相当纯粹的简谐振动波形，其频率与模型的一扭频率相近，由此说明这一记录的响应是属于失速颤振的。

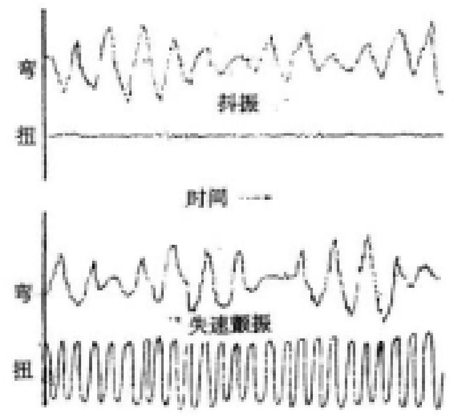


图 9-14 抖振与失速颤振响应对比

抖振边界几乎完全取决于气动构型，而失速颤振则可能因结构参数（例如结构固有频率或结构阻尼）的改变而有所变化。一般抖振边界较其它限制所形成的边界为低（图 9-15），抖振边界常常决定了飞行的速度和高度。当飞机穿过抖振边界时，飞机将产生抖动、上仰、下坠、偏头及摇摆等现象，因而飞机的飞行范围往往受到抖振边界的限制。近年来，根据飞行经验，有时刻允许飞机穿过抖振边界，但规定了限制飞行的抖振强度范围。因此，现在抖振试验中，不仅要测定抖振的始发点，而且还要测定抖振的强度。

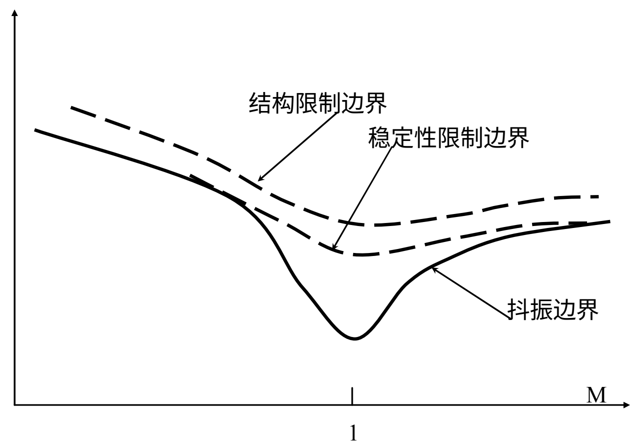


图 9-15 某型战斗机的抖振边界示意图

在机翼尾流或不良外形前置物尾流中的尾翼的抖振载荷，有时候会很高而带来严重的结构疲劳问题以及其它结构强度问题。对抖振问题，只有采取对症下药的气动力修改措施来治理，由于尾流中扰动的频谱往往宽而平，即激励力包含等量齐观的多种频率成分，因此如果采取某种吸振器或减振器，它们的特征参数应该是可调的，甚至是可进行反馈主动控制的，美国 NASA 已经进行了在 F18-A 飞机的双垂尾上采用分布式压电作动器来主动抑制抖振的研

究。为做到这一点，不可避免的要在经费上及飞机重量上付出代价。

高速抖振（激波抖振）边界对飞机性能特别是战斗机性能影响很大，提高抖振边界必须从推迟激波发生、减弱激波分离、控制附面层的发展等方面着手。通常增大机翼后掠角将降低低速抖振边界而提高高速抖振边界，翼面展弦比越小，高速抖振边界越高，减小机翼相对厚度、采用翼刀和前缘锯齿以及人工涡流发生器等都可以改善抖振性能。在布局固定后，翼型对推迟激波发生提高抖振边界有重要作用。

第十章　防颤振设计中的试验工作

试验工作在飞机防颤振设计中占有重要地位，参考文献[4]是有关这方面的专著，有兴趣或实际工作中有需要者可查阅该专著。本章仅对有关问题作简要介绍。

§10.1 飞机全机地面振动试验

全机地面振动试验（Ground Vibration Test，GVT）主要是在第一批制造出来的飞机上进行的。其目的主要是检验或修正计算中所用的结构参数及计算出的固有振动特性。改型飞机或有新装载构型的飞机有时也需进行全机地面振动试验，过去这项试验称为全机地面共振试验（Ground Resonance Test，GRT），因为其原理是基于共振现象的。

由振动理论可知，当外加简谐激振力与结构的某一阶固有频率相等时，由于结构阻尼的存在，结构响应的幅值会剧增达到一个有限的峰值，其与激振力的相位差呈 90°。因此，若逐渐增加激振力频率，随时记录被测试结构的响应量（幅值及相位差），它们都随激振频率改变而改变，一旦发现幅值出现峰值（即按幅值共振指标）或相位差达到 90°（即按相位共振指标），就可以认为当时的激振频率是被测试结构的某一阶固有频率，若在结构上布置了足够多的传感器，则可同时记录下该阶固有振型。由于飞机结构复杂且存在结构阻尼，因此实际执行 GVT 试验远非像上述原理那样简单。仅举一点来说，要使所布置的众多传感器的响应都具有相同相位差，就是件十分困难的事。而为了提高试验的效率逐级提高激振频率耗时也较长，所以常采用激振频率以某种速率连续变化（称为连续“扫频”激振）以加快试验进程。扫频的速率的选取也是有其理论根据的。从振动理论上讲，如果采用冲击激振，仅需一次冲击，就可由其响应记录数据，分析提取出被测试结构的固有振动特性，当然这要依靠良好的数据分析处理软件（通常它们都包含所谓的“模态分析仪”之中）。冲击激振显然效率很高，但对于飞机这样庞大而复杂的组合结构，这种技术目前还很少实际应用。

原则上，飞机的固有振动特性是指它在空中自由飞行时的固有振动特性，因此在进行 GVT 时，还有一个被测试飞机的支持问题。通常，小飞机可以用橡皮绳悬挂方式模拟自由飞行状态，大型飞机则用空气弹簧作为支持件。最简单和最经济的方式，是飞机取停机状态，但对起落架的轮胎放气使轮胎变软，充当自然的软支撑。当然这种方式因起落架未收起而与自由飞行状态相差较大。无论采用哪一种方式，都会产生由于因柔软支持带来一些接近刚体位移的振型，其频率应小于飞机弹性变形最低固有频率的一定比例（例如三分之一）。

有时也对某些飞机部件固定在台架上作共振试验，其目的往往是实测某些难于用分析手段获取的部件支持刚度。它的原理基于（刚度 k）=（质量 m）×（固有频率平方）。例如对发动机架或外挂物挂架与机体结构的联接刚度或全动尾面根部转轴在机身上的支持刚度测试就会有上述问题。根据刚度系数的定义，刚度系数（或刚度矩阵）实际上是无法测试的，静力

试验只能测量结构的柔度矩阵（工程中常称之为影响系数矩阵）。即在一点处加载，测出所有选择的测量点处的变形（位移）量就可以了，由柔度矩阵求逆运算即可得到刚度矩阵，但是静力试验测量外部变形（不是内部应变）往往很难得到足够准确的测量值，例如测出的柔度矩阵往往不具备应有的对称性，如果两个对角柔度影响系数差别不大，则可以二者的平均值作为该系数之合理值。如果差别太大，只好在试验工作本身寻找原因，更正后重新测试。除了对称性检查外，还有一项重要的“ 正定性 ”检查。刚度矩阵如果不是正定的，则肯定是错误的。因为它意味着，在某种变形状态（例如$\{x\}_{(N,1)}$）下，结构势能（与$\{x\}^T[K]\{x\}$成比例）是负数，即为了使结构有这种变形，不但不需要对结构做功，结构自身反而会释放出能量，这当然是不可能的事。采用这种错误的刚度矩阵做飞机结构固有振动分析，会算出负值的固有频率，这也是明显不合理的。

一旦检查出测试的柔度矩阵不具正定性，就要在整个静力试验各环节中查找原因，予以修正。相比之下，由共振试验结果反推刚度矩阵反而更为可靠，因此静力试验结果往往只用来与共振试验结果进行比较验证。图 10-1 是全机地面振动试验的测试布局示意图。

§10.2 低速风洞颤振试验

颤振模型试验的目的是确定模型发生颤振时气流的马赫数、密度和速度，以及颤振的频率。颤振风洞试验就其所使用的风洞来分，可以分成低速风洞颤振试验和高速风洞颤振试验两大类。低速风洞尺寸较大，模型所受的空气动力较小，便于设计、制造和调整参数，试验费用较低，一般用于研究设计参数对颤振特性的影响。高速风洞恰恰相反，适合于校核性试验或专门研究马赫数效应的试验。

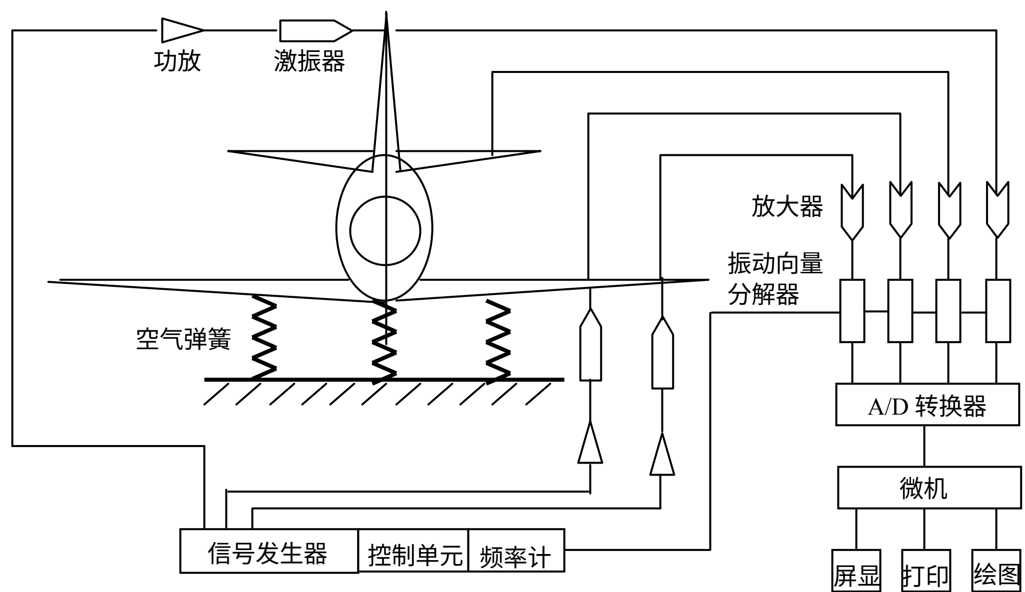


图 10-1　全机地面振动试验的测试布局示意图

一、颤振模型设计制造的基本考虑

① 几何相似（以机翼为例）

颤振模型机翼的平面形状与实物机翼相似

颤振模型的翼剖面形状不要求与实物相似，通常用对称翼型比较方便

② 动力学相似

与颤振分析有关的物理量按照一个与其量纲一致的比例尺伸缩（放大、缩小)。颤振模型设计中使用的三个基本物理量量纲为：长度 l，质量 m，时间 t。

③ 模型构造

机翼低速颤振模型的刚度模拟，一般采用单梁或梁架或两者的组合来实现。模型的空气动力外形，通过与梁（梁架）单点相连的木质或塑料框，在其上蒙绵纸或塑料板来保证。并在框段上加适当的配重以满足对惯性特性的模拟。

对于大展弦比长直机翼及长后掠机翼，通常采用单梁/盒段式构造，如图 10-2 所示。机翼的截面刚度 EJ，GJ，仅由展向变剖面单梁提供。仅弦向盒段的中央加强肋与单梁固接，相邻两盒段之间留有空隙，足以使机翼弯、扭变形时，两盒段不会抵触而产生附加刚度。该空隙绕翼型剖面一周，可用柔性薄膜粘贴密封，使盒段之间不会有气流穿泄，也不会使两盒段相互牵连而参与受力。盒段最后外表蒙棉纸后，喷洒涂布油使它张紧光滑，保证良好的流线型外形。单梁的位置当然是在机翼模型各盒段的刚心连线上。

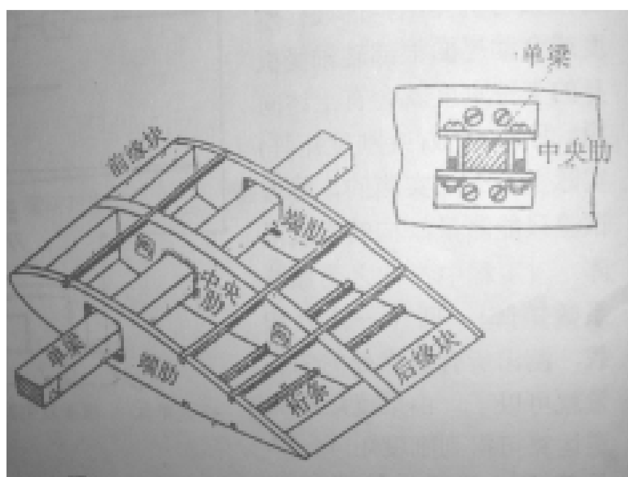


图 10-2 低速风洞机翼颤振模型盒段构造

二、低速颤振模型设计实例

为了表述的明确，下面以一个模型机翼设计实例加以说明。首先根据实用条件，选定三个基本物理量纲的伸缩比例尺，长度 l，质量 m，时间 t。

1）按照实物尺寸与风洞试验段尺寸，选定长度比例尺

假设实际机翼的半翼展长 10 米，而长方形风洞的宽为 1.25 米，为保留足够空隙取其宽度五分之四，即 1 米，则选定长度比例尺为 $(l_m/l_w)=1/10$，下标 m 和 w 分别代表“模型”

及“ 实物 ”。

2）按照实物（机翼）计算得到的颤振速度与风洞最高风速，选定速度比例

例如：计算 V_F =200 米/秒，风洞最大风速名义上可达 60 米/秒，但为了留有余地，仅取其六分之五，即 50 米/秒，于是选定速度比例尺为 $(V_m/V_w)=50/200$ =1/4。以下引用符号[x]代表 x 的量纲，则 $[V]=[l/t]$，从而有 $[t]=[l]/[V]$。因此，上例中既已选定 l 比例尺为 1/10，V 比例尺为 1/4，这就意味着时间 t 的比例尺是 $(t_m/t_w)=(1/10)/(1/4)=4/10=2/5$。

而与此相关的频率 ω，其量纲 $[\omega]=[1/t]=1/[t]$，因此本例中 $(\omega_m/\omega_w)=5/2$，也就是说风洞吹风测出颤振频率如果是 $15Hz$ 的话（$\omega_{Fm}=15\,Hz$），则可推断实物机翼的颤振频率是 $\omega_{Fw}=\frac{2}{5}\times\omega_{Fm}=\frac{2}{5}\times 15\,Hz$=6$Hz$。

3）按照实物（机翼）计算颤振时所取的空气密度，与风洞试验室内的空气密度，选定质量密度比例。

例如计算颤振是以海平面为准的，而风洞试验室空气密度也与海平面的相差无几，故选定密度比例尺为 $(\rho_m/\rho_w)=1/1$。

由于 $[\rho]=[m/l^3]=[m]/[l]^3$，即 $[m]=[\rho]\cdot[l]^3$，故本例中，质量比例尺已选定是 $(m_m/m_w)=(1/1)\times(1/10)^3=1/1000$。

如果实际机翼有一个 1500kg 的外挂物，那么该外挂物的模型则只能是 1.5kg。综上所述，按照有关实际考虑，表面上是选定了长度、速度、密度的比例尺，实质上也就是选定了三个基本物理量，长度、时间、质量的比例尺。

下一步是设计确定模型机翼的唯一骨干受力件——单梁。为了制造方便，该单梁常采用变剖面的矩形剖面梁。它的宽度 b，高度 h，按以下步骤确定，原始数据是实物机翼的截面 EI，GJ，二者量纲相同，都是：

$$[EI]=[GJ]=[E]\cdot[I]=([\text{力}]/[\text{长度}]^2)\cdot[\text{长度}]^4=[\text{力}]\cdot[\text{长度}]^2$$

$$=[m][\text{加速度}]\cdot[\text{长度}]^2=[m]([\text{长度}]/[\text{时间}]^2)[\text{长度}]^2=[m][l]^3/[t]^2$$

$(EI_m/EI_w)=(m_m/m_w)(l_m/l_w)^3/(t_m/t_w)^2$。对于本例，就是：

$$(EI_m/EI_w)=\left(\frac{1}{1000}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^3\Big/\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{160000}$$

同样有

$$\left(GJ_m/GJ_w\right)=\frac{1}{160000}$$

即本例中，翼剖面弯、扭刚度按十六万分之一的比例缩小，这样惊人的小的缩小比例，对于低速风洞颤振模型是带有普遍性的。由此可见，为什么模型只能采用单梁来模拟机翼的刚度特性，若采用和实物一样的蒙皮、梁、肋组成的薄壁结构，其剖面刚度不可能达到这样小的缩小比例。对本例，设在翼根处 $EI_w=11.30\times10^6$千牛·米^2，$GJ_w=8.44\times10^6$千牛·米^2，则按上述十六万分之一的缩尺，$EI_m=70.625$千牛·米^2，$GJ_m=52.75$千牛·米^2。若采用硬铝材料，可找出模型翼根处承力单梁矩形截面的尺寸是：宽度 b=12mm，高度 h=10mm。

依此类推，可以沿展向确定出承力单梁在几个站位处的截面宽度及高度。为了制造方便，通常都把单梁做成沿展向阶段变化，每一阶段内截面长宽不变，通过反算出它的柔度，与应有的柔度相比，稍加修正，最后将单梁的设计图纸确定下来，从而完成了模型的刚度模拟的

设计。

下一步是模型的惯性模拟。由上例可见，该模型的质量缩小比例是千分之一，比刚度的十六万分之一大得多。这反映出来的事实是模型的骨架（单梁及各盒段）的质量一般都达不到应有的量级，而需设置配重来弥补。图 10-3 所示为一个盒段的略图。假设该盒段模型各个惯性量的值与它应具备的惯性量值的差值为：

盒段质量 m'，对刚心的质量静矩 S'_α，对刚心的转动惯量 I'_α，按图 10-3 所示前后两个呆重的构型方案，为具备上述三个惯性数据，应符合以下三个方程式，即：

$$m_1 + m_2 = m', \quad -m_1 r_1 + m_2 r_2 = S'_\alpha, \quad m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = I'_\alpha \tag{10.1}$$

再由一些实际问题的考虑，增加一条要求，如对 r_1 和 r_2 限制，则可以确定待定量 m_1，m_2，r_1，r_2，呆重通常是固接在盒段的中央加强肋上。

到此为止，模型的刚性及惯性模拟，设计上都已达到，制作出来后还应该进行静变形测试及固有振动试验以作最后的检验。

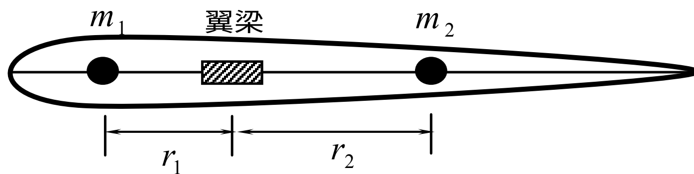


图 10-3 盒段的质量模拟

三、低速风洞颤振试验的其它问题

风洞试验的过程基本上就是逐级提高风速直至颤振发生为止。

风洞试验还有很多具体技术问题，例如模型保护措施（可能更重要的是对风洞的保护，防止模型因颤振解体，其残骸打坏风洞）。而作全机模型时，它在风洞中的悬挂设施更是一个专门的技术难题。图 10-4 是一张全机颤振模型在风洞中安装情况的照片。

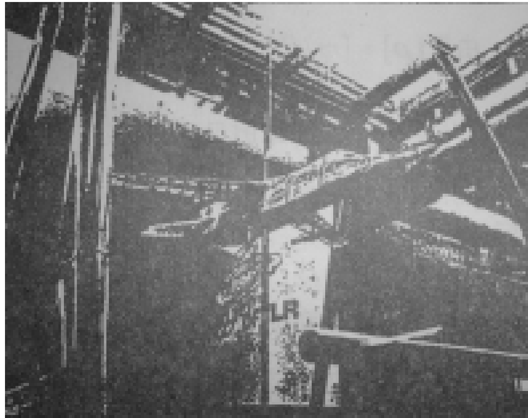


图 10-4 低速风洞全机颤振模型

对于一些战斗机的小展弦比机翼，考虑弦向剖面 EI，GJ 的单梁式力学模型对它们已失去意义，它们的颤振模型一般用梁架式结构来模拟刚度。最早的梁架式结构是用于米格-19类飞机机翼根部三角区的刚度模拟。该类机翼的外翼部份仍是经典的双梁双闭室薄壁工程梁

构型（EI，GJ 式的力学模型），故仍采用前述的单梁模拟实物刚度的方法。翼根三角区内，模型的承力件可以大体上按实物那样布置。这样再选用尺寸较大的风洞，从而模型长度缩比值可以取较大的值，使得在三角区内模型的三根主承力元件按刚度比例缩小后还可以制造出来。如果用一根单梁通到底（直到固持夹持处），则三角区内该单梁的 EI，GJ 原始数据都难以进行合理的模拟。

对于米格-21 这类三角形机翼飞机，其颤振模型则应是用梁架构型来进行全翼面刚度模拟。

§10.3 高速风洞颤振试验

高速风洞有暂冲式及连续增压式两种。目前，国内使用的大都是暂冲式，西北工业大学已经建成了我国首座、亚洲最大的连续增压式高速风洞。图 10-5 是一个暂冲式跨音速风洞示意图。改变第二喉道的形状，可以在试验段处得到不同马赫数的气流。进行高速风洞颤振模型（以下简称“高速模型”）设计时，应使高速模型的马赫数 M_m 与实物的马赫数 M_w 相同。如果只用一个高速模型来模拟一定的飞行马赫数范围，就要求风洞不仅其 p_0 可以调整，而且 T_0 也可以调整。如果 T_0 不能调整，模型的密度必须可以调整，这也就是说必须准备一套大小相同，而轻重不同的多个模型。（由于经济上的考虑，实际工作中，此法很少采用。）

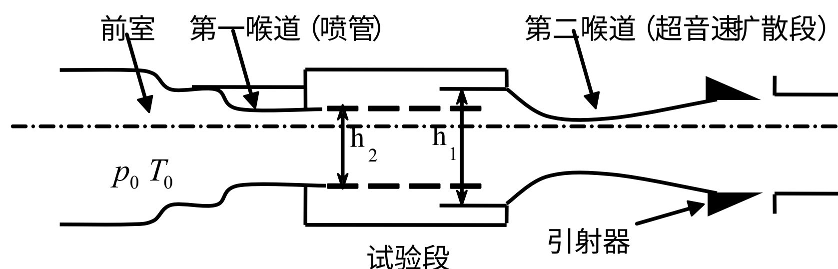


图 10-5 暂冲式跨音速风洞示意图

高速模型设计时，首选的三个基本缩比比例尺是：长度、密度及速压（低速模型是速度），长度比按风洞实验段尺寸与实物（机翼）尺寸来确定。密度比按风洞中空气密度及实物飞行状态下的空气密度来确定。注意到在低速风洞中空气密度可以认为是不变的常数，但在高速风洞中的空气密度则是改变的，所以必须事先估计一下当试验中出现颤振时试验段内的空气密度，这当然不会很准确。速压比则根据风洞前室驻点压力 p_0 可达到的限度，与实物估算出的颤振速压来定。选取速压比例尺有两种方法。一是按照飞机的实际颤振速压选取，使模型颤振发生在风洞速压带的中点附近。这种方法可以得到很多颤振点，在变参数研究时能够得到完整的曲线。其缺点是，如果飞机的颤振速压较高，则比例尺 q_m/q_w 将取得很低，例如 0.2～0.3，使得模型受力件厚度太小，制造困难。第二种方法是考虑到现代歼击机颤振设计点为低空跨音速区（H=0，M≈1）。按海平面空气密度及音速可估计出此时速压约为 $75kN/m^2$，

再计及安全系数 1.15^2，则要求颤振速压不小于 $99kN/m^2$。若取 $q_m/q_w = 0.5$，则模型只要在速压 $49.5kN/m^2$ 以下不发生颤振就可以认为飞机满足设计要求。此法的优点是速压比大，模型容易制造。其缺点是得到的颤振点少，若进行变参数研究，不易得到完整的曲线。

高速风洞试验的进程是，对某一个试验马赫数，逐级增加前室驻点压力，直到颤振发生为止（见图 10-6）。如前所述，这时风洞试验段的空气密度不会是模型设计时所估计的值，因此，由这个点还不能直接按比例尺换算出实物的颤振速压。工程中通常采用所谓的“密度修正”步骤来取得可供设计使用的颤振速压：改换试验段马赫数，可以得到一系列临界颤振速压点，连接各点从而可以画出一条颤振边界曲线，原则上，该曲线上只有一个点（图 10-6 的●点）可以除以比例尺后以供使用。

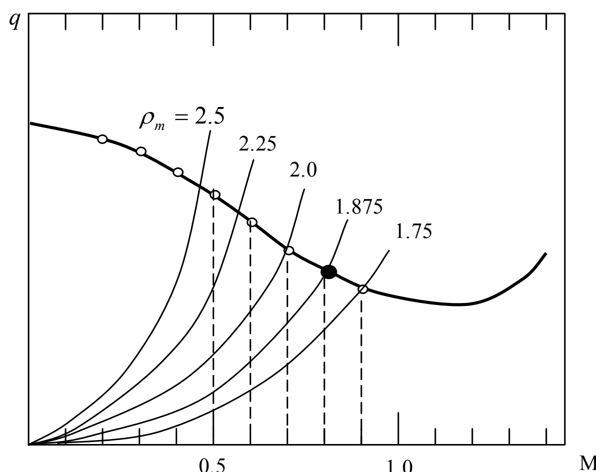


图 10-6 高速风洞颤振试验过程示意图

“密度修正”的办法如下。假设我们要考察的实物情况是在 H=5000 米高度，该处的 $\rho_w = 0.75kg/m^3$，估计风洞试验段在 M=0.7 时 $\rho_m = 0.5kg/m^3$，故取密度比 $\rho_m/\rho_w = 2/1$，但是往往在高速模型制作出来后，发现是超重的，例如超重 25%，那么就把密度比改为 $\rho_m/\rho_w = 2\times 1.25 = 2.5$，由于 ρ_w 已经设定是 5000 米高空的 $0.75kg/m^3$，故希望试验中颤振发生时的 ρ_m 等于 $2.5\times 0.75 = 1.875kg/m^3$。但一般情况下，颤振发生时，密度不会正好是 1.875 kg/m^3。如试验中实测的气流密度是 $\rho = 2.0kg/m^3$，现在就取 $M = 0.7,\ \rho = 2\ kg/m^3$，用偶极子网格法算出一个模型颤振速压 $(q_m)_{2.0}$；又取 $M = 0.7,\ \rho = 1.875\ kg/m^3$ 算出一个颤振速压 $(q_m)_{1.875}$，这两个理论计算值的比 $\dfrac{(q_m)_{1.875}}{(q_m)_{2.0}} = f_\rho$ 就是“密度修正因子”。

然后，把实测出来的模型颤振速压 $(q_F)_m$ 乘以因子 f_ρ 得到 $(\tilde{q}_F)_m$，把 $(\tilde{q}_F)_m$ 除以速压比例尺后就是可供飞机设计使用的颤振速压值。

高速模型的设计方法有全结构相似法和准结构相似法。全结构相似就是把真实结构上的每一个受力构件按选定的比例尺逐一缩比下来，即真实结构有一根梁或肋，在模型上的对应

位置上也有一根梁或肋，同时蒙皮也按比例尺缩比为受力结构。内部油箱全部模拟，并通过注入燃油来模拟燃油分布。全结构相似模型具有精确反映真实结构动态特性和颤振特性的特点，但相应地也带来了结构设计和加工复杂，造价高，周期长以及要求大尺寸风洞（风洞太小，相应地长度比例尺就太小，无法缩比）等问题。而准结构相似模型（部分相似模型）参照真实结构的布置将部分受力形式相同的结构合并后再进行缩比，也可将部分梁肋的承载能力折算到蒙皮上以减少模型中梁肋的数量。内部装载可以用适当密度的泡沫塑料填充来模拟。准结构相似模型既能较好地反映真实结构的动态特性和颤振特性，又能使模型的设计和加工简单方便。

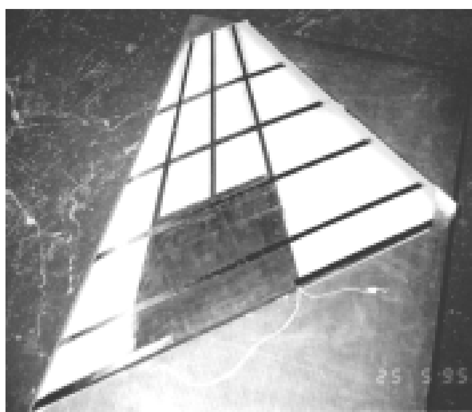


图 10-7 高速风洞机翼颤振模型

图 10-7 所示是一个小展弦比机翼高速风洞颤振模型的照片，模型是由复合材料碳纤维制成的梁、肋组成一个梁架式结构，外表面覆盖由玻璃钢制成的蒙皮，内部用泡沫塑料填充而成的。

高速风洞颤振试验比低速风洞颤振试验困难得多。主要原因例如：

ⅰ）高速风洞的试验段尺寸比低速风洞小得多。

ⅱ）模型强度问题更加突出，因为它要承受风洞启动时冲击气流的打击，模型保护系统必须细心设计。

ⅲ）如果是在暂冲式高速风洞中试验，则因气流持续时间非常短暂，必须采用合适的数据采集处理及颤振识别系统。如果条件允许，可以在连续增压式高速风洞中进行模型颤振试验，则对数据采集要方便得多，但对颤振模型设计的要求是相同的。

§10.4 飞行颤振试验

飞行颤振试验又简称为颤振试飞。由于显而易见的人身安全原因，飞行颤振试验进行的过程与模型风洞颤振试验过程完全不同。飞行颤振试验从来不会试图逐步提高飞行速度直到进入颤振状态，而只会是保持在颤振前（亚临界颤振）的状态下，测量亚临界模态频率及运动衰减率，小心谨慎地（往往在地面监测指导下）逐步提高飞行速度，并且总是与设计包线

保持足够的距离。在进行颤振试飞前，必须获得有足够准确的颤振设计数据（计算的和风洞试验的），这样使试飞员对他将会遭遇到的潜在危险点有很好的认识。

飞行颤振试验有两个对测试不利的特点：即测量信号的低信噪比和高密集型的频谱，这对试验结果的数据分析处理带来更多困难。

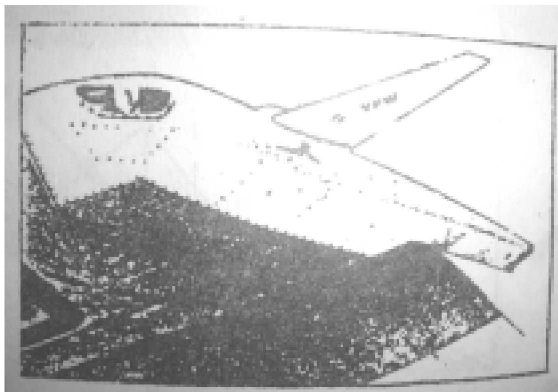


图 10-8 飞行颤振试验的翼梢激振小翼

现将颤振试飞中一些有关技术问题提出如下：

1．激振

对试验用的飞机在飞行中予以激励，然后记录并分析其初始响应或强迫响应

1）冲击式激励：

用专门设计制造的小火箭对飞机进行激励

用推击驾驶杆的方式施加冲击激励。

2）大气紊流激励：利用自然阵风。

以上两种激励，都需要有准确有效的数据处理软件，由记录数据中提取各模态的频率及运动衰减率信息。

3）简谐激励：

旋转偏心轮及电磁激振器都可应用到颤振试飞的激励中，对于较大型的飞机也常应用安装于翼梢处作简谐振动的小翼片，产生简谐气动力来激振（图 10-8）。简谐激振产生的定常响应具有较高的信噪比，但为逐个激出各贴切有关的模态，将需用较长的试飞时间。飞行颤振试验与地面振动试验相比，由经济性考虑，前者对缩短试验时间要求更为迫切。

4）扫频激励：

扫频即激振频率是连续变化的，其测试时间显然比简谐激励的短，但扫频速度越高，则信噪比越低。

2．数据采集

飞行颤振试验中一般是采用遥测技术，这样，可以把采集到的响应信号直接送到地面测试控制中心，在那里信号经过实时分析，得出模态频率及运动衰减率并立刻送回给机上试飞

人员，并带有一些指令或警告，告诉试飞员下一步应该做什么以及如何做。

3．数据处理

所用的数据处理软件的质量及效率对颤振试飞之成败起非常重要作用，尤其是对于那些引用随机方式激励来说更是如此。

4．临界颤振点确定

临界颤振点将由所获取的运动衰减率数据，按某种外推办法推算出来。因此这个结果一般只具有参考意义。在设计包线内，飞机就颤振来说是否安全，对于这个问题根据颤振试飞可给出可靠信息。

图 10-9 所示为在一架喷气式客机上激振器及传感器布置的示意图。

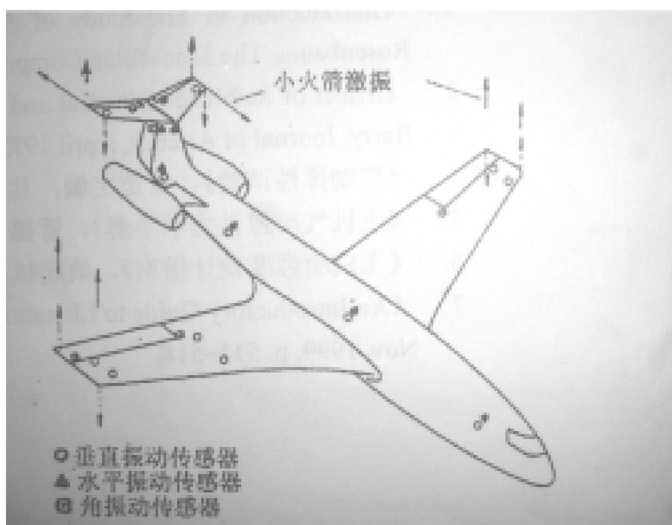


图 10-9 颤振试飞时传感器的布置示意图

第十一章　气动伺服弹性稳定性分析概论

§11.1 引言

气动伺服弹性，其英文名称为 Aeroservoelasticity（ASE），顾名思义，就是在气动弹性系统中考虑了飞行控制系统的耦合效应。现代飞机尤其是高性能战斗机，普遍采用了带电传操纵系统的主动控制技术。而在飞行控制系统的设计过程中，飞机是作为刚体来考虑的，即认为飞机系统与飞行控制系统之间不存在耦合，如图 11-1 所示。但是随着现代飞机柔性的增大，飞机系统与飞行控制系统之间的耦合变得不可忽略，而且这种耦合对飞行稳定性的影响往往是不利的，因此这种刚体飞机假设已经不能满足飞行稳定性的要求了。

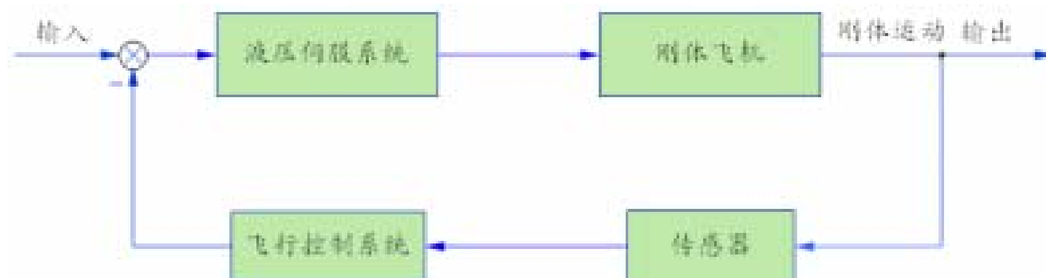


图 11-1. 典型刚体飞机假设下的飞行控制模型

由于飞机的非定常气动力、飞行控制系统以及飞机结构动力（弹性力、惯性力）之间的耦合，可能破坏飞机原有的气动弹性平衡，以致产生气动伺服弹性不稳定现象。美国的 YF-16、YF-17、F-18、X-29 飞机在早期飞行试验中就曾经遇到过这种气动伺服弹性不稳定现象。以 YF-16 为例，YF-16 飞机在首飞前进行过大量常规的计算和试验工作，但没有发现不稳定现象。但是在第 8、9、10 次飞行中，飞机出现了强烈振动，飞行员感觉这种振动表现为翼尖导弹的俯仰运动。经过事故分析，确定这是一种气动伺服弹性不稳定现象，即它是由于翼尖导弹俯仰模态与控制系统横滚回路耦合所引起的一种不稳定问题。对飞机进行气动伺服弹性稳定性分析已经成为现代飞机开发研制过程中必不可少的一个环节，而且越来越引起飞机设计师的重视。

实际飞机结构在受到扰动激励后会发生弹性振动，飞机的运动信号经传感器反馈给飞控系统并使其发出附加操纵指令，通过液压伺服作动系统驱动舵面产生附加偏转来操纵飞机，然而附加的舵面偏转产生的气动力变化又会激励机体产生振动，这就形成了一个闭环反馈机制，如图 11-2 所示。一方面，这种闭环反馈会影响飞机的操纵稳定性特性；另一方面，这种闭环反馈通过液压伺服作动系统向飞机系统输入了能量，这部分能量反馈也会影响飞机的颤振特性。

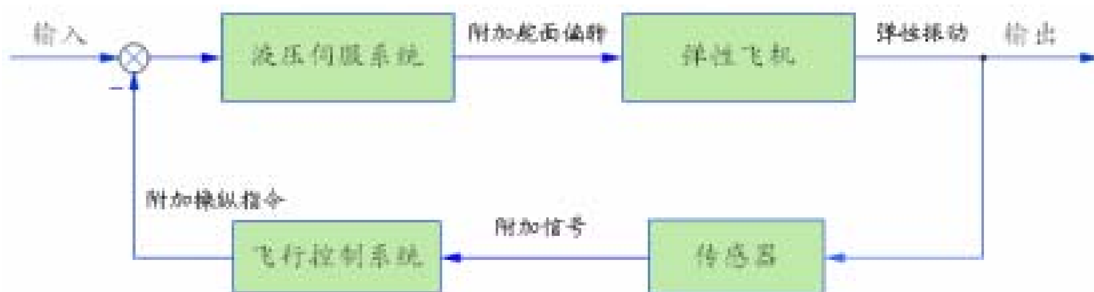


图 11-2. 实际弹性飞机与伺服控制系统耦合模型

利用液压伺服作动系统驱动舵面偏转运动的飞行控制系统也称为伺服控制系统。气动伺服弹性系统是由飞机气动弹性系统与伺服控制系统组成的闭环反馈系统。气动伺服弹性力学的任务就是研究气动伺服弹性系统的稳定特性和响应特性，从而成为飞机设计中的一项重要任务。

在工程应用中，飞机气动伺服弹性稳定特性常常是设计师所关心的重要问题，所以本章的主要内容是介绍气动伺服弹性力学的基本概念和频域稳定性分析方法。因为频域方法是自动控制理论中一种经典的稳定性分析方法,而且由于传统气动弹性分析时常用的是频域方法，因此在分析气动伺服弹性稳定性时，首先会考虑使用这种方法。实际上，目前在工程实际分析中应用最为广泛的也是频域方法。

到这里我们可以看出，气动伺服弹性力学是气动弹性力学与自动控制系统理论的交叉学科。在本章内容中我们将使用自动控制系统的观点和理论，来建立飞机环节的传递函数，进而实现气动伺服弹性系统的建模和分析。

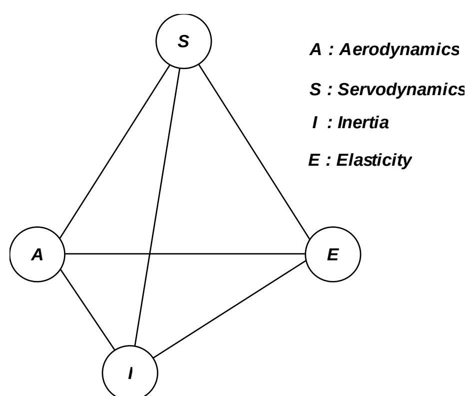


图 11-3 气动伺服弹性四面体

§11.2 气动伺服弹性力学的概念

上一节大致介绍了气动伺服弹性力学的研究对象和分析方法，为了使我们更进一步了解到气动伺服弹性力学与传统气动弹性力学的关系以及各自的研究范围，我们用一个气动伺服弹性力学四面体图形来说明：

如图 11-3 所示，底面三角形 A、E、I 构成常规气动弹性力学研究内容；侧面的三个三角形中，S、A、I 构成伺服飞行力学内容，它不考虑结构的弹性，即它的研究对象是具有伺服控制系统的刚体飞机；S、E、I 构成伺服弹性动力学内容，即它不考虑气动力的作用，研究结构弹性运动与伺服控制系统的耦合作用，是飞机在地面上的动力稳定问题；S、A、E 构成气动伺服弹性静力学内容；而四面体的四个顶点 S、A、E、I 则构成了气动伺服弹性动力学的研究内容，即研究带有飞行控制系统的飞机在自由飞行状态下可能发生的动力学稳定性问题，对现代飞机设计具有重要意义，本章也仅讨论这部分内容。

对气动伺服弹性动力学问题，根据有无作用于飞机上的外部扰动（如阵风、武器投放等），可将其划分为两类问题：对于不考虑外部扰动的，属于通常所说的气动伺服弹性稳定性问题；而考虑外部扰动的情况，就构成了气动伺服弹性响应问题。具体来说，气动伺服弹性动力学主要研究两方面的问题：一方面是系统分析，即给定一个具体系统，考虑如何从理论上对系统的动态性能和稳态性能进行定性分析和定量计算；另一方面是系统校正或设计，即指已知系统的性能要求，研究如何根据已知的实际情况，合理地确定控制装置的结构和参数。前者是正问题，后者是反问题。

§11.3 飞行控制传感器与气动伺服弹性问题的形成

由于课程的内容限制，本节不过多地叙述飞控系统具体环节的原理和构成，仅介绍与本章相关的内容。在第 11.2 节中大致介绍了气动伺服弹性问题的形成，这里再具体加以说明。

图 11-4 给出了刚体机身和传感器的安装位置，以及机身自由—自由一阶弯曲振型和传感器的附加运动情况，当然这是一种夸张的表式，仅用以说明弹性振动对传感器的干扰效应。在实际飞机结构中，以纵向过载传感器（即加速度计）为例，应尽量选择安装在靠近图 11-4 所示的节点位置上，但由于各种实际因素如安装误差影响，往往无法避免受到机身振动的干扰，这种由于飞机结构的弹性振动导致传感器的附加运动一般都是存在的。

参考 11.2 节中图 11-2 的控制方块图，并结合上面的说明，就可以了解气动伺服弹性问题的产生原因。

本节的另一个任务是确定传感器安装位置上弹性振动引起的附加运动量。仍以加速度计为例，其感受的振动加速度是振动位移的二阶导数，记纵向过载为 n_y，机身纵向平面弯曲振动位移为 q_s，则有：

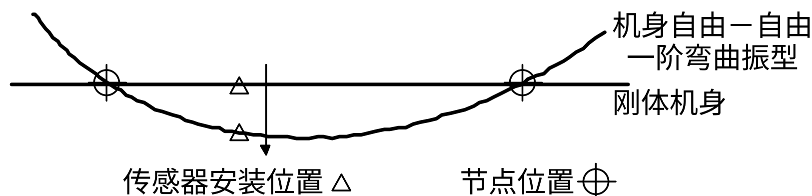


图 11-4 机身弯曲振动引起传感器的附加运动

$$n_y = \frac{1}{g}\frac{d^2 q_s}{dt^2} \tag{11.1}$$

飞机结构是连续弹性体，具有无限多个自由度，而在工程分析中，一般使用有限元方法建立飞机结构的动力学模型，从而将问题的规模降低至有限多个自由度。图 11-5 给出了一个全机半翼展的结构动力学有限元模型。

根据结构振动理论，飞机结构的自由振动方程为：

$$[M]\ddot{q} + [K]q = \{0\} \tag{11.2}$$

其中$[M]$、$[K]$分别为模型的质量阵和刚度阵，$[q\}$是物理坐标。求解这个广义特征值问题可得n阶固有频率（$\omega_1,\ldots,\omega_n$）和模态矩阵$[\mathbf{\Phi}]$，且$[\mathbf{\Phi}]$中各列向量均按质量归一化，即：

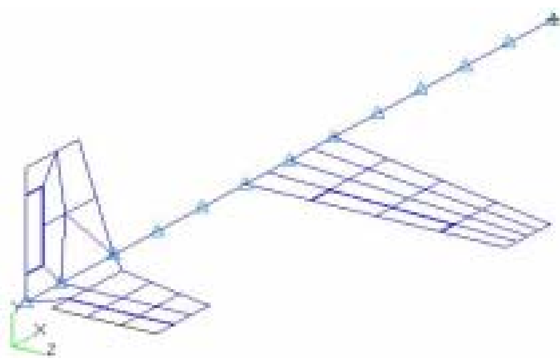


图 11-5 全机半翼展动力学有限元模型

$$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{11.3}$$

$$\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \omega_i^2, & i = j \end{cases} \tag{11.4}$$

即：

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad [\Phi]^T[K][\Phi] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

引入n维广义坐标η，并进行坐标变换：

$$\{q\} = [\Phi]\{\eta\} \tag{11.6}$$

将（11.6）带入（11.2）式，并前乘矩阵$[\Phi]^T$得：

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\eta\} = \{0\} \tag{11.7}$$

根据（11.3)、(11.4）式有：

$$\ddot{\eta} + diag(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)\eta = 0 \tag{11.8}$$

飞机结构上任意点的物理坐标均可按照（11-6）式经广义坐标变换来表示。则传感器安装位置处的物理坐标可以表示为：

$$q_s = [\mathrm{T}_s][\Phi]\{\eta\} \tag{11.9}$$

其中$[\mathrm{T}_s]$是插值矩阵。根据传感器安装位置，$[\mathrm{T}_s][\Phi]$的意义可以这样解释：如果该位置恰好位于有限元模型中的某个结点上，则其表示该结点处对应各阶固有频率下的固有振型所组成的行向量；如果该位置位于某两个结点之间，那么其表示这两个节点在该处对应各阶固有频率下的固有振型进行线性插值后所组成的行向量。$[\mathrm{T}_s]$即可根据上述意义进行构造。

§11.4 舵面/飞机环节的传递函数

对于处于自由飞行状态，即自由—自由边界条件下的飞机，其运动自由度包括了全机刚体运动（沉浮、俯仰等)、结构弹性振动以及操纵面附加偏转的运动，因此建立广义坐标下的气动弹性运动方程时，应选取的广义坐标应包括刚体运动坐标、弹性模态坐标、附加舵面偏转坐标。即广义坐标矢量应扩阶为$\eta = \begin{bmatrix}\eta_r & \eta_e & \eta_\delta\end{bmatrix}$。这样一来，飞机的模态矩阵就扩阶为$[\Phi] = \begin{bmatrix}\Phi_r & \Phi_e & \Phi_\delta\end{bmatrix}$，其中下标$r, e, \delta$分别表示刚体运动、弹性振动和附加的舵面偏转运动。其中弹性模态阵$[\Phi_e]$通过上节所述的模态分析得到，并且采用质量归一化；刚体运动位移阵$[\Phi_r]$和附加舵面偏转运动位移阵$[\Phi_\delta]$可通过人工添加单位刚体位移形成。由于采用了人工模态位移阵，扩阶后的模态矩阵便不再像$[\Phi_e]$一样具有正交性了，飞机的广义质量阵和广义刚度阵也不再是对角阵。

使用上述扩阶后的模态矩阵$[\Phi]$和广义坐标η，以亚音速情况为例，用某种气动力理论比如偶极子网格法计算得到对应一系列减缩频率k的广义气动力系数矩阵$[\mathbf{Q}(k)]$，则广义坐标下飞机的气动弹性运动方程形式如下：

$$[\hat{M}]\{\ddot{\eta}\} + [\hat{C}]\{\dot{\eta}\} + [\hat{K}]\{\eta\} + \bar{q}[\mathrm{Q}(k)]\{\eta\} = \{\hat{\mathrm{P}}(t)\} \tag{11.10}$$

其中$[\hat{M}],[\hat{C}],[\hat{K}]$分别是广义质量阵、广义阻尼阵和广义刚度阵，速压$\overline{q}=\dfrac{1}{2}\rho V^2$，$\hat{\mathrm{P}}(t)$是广义外扰力列阵。

在稳定性分析中不考虑外扰力作用，并且理论上频域稳定性分析只能处理单输入/单输出问题（Single Input Single Output）。在这里我们只考虑一个舵面偏转自由度η_δ；在处理气动伺服弹性的工程问题时，如果飞机刚体运动频率远低于弹性模态频率，常常在运动方程中略去刚体自由度。为简化分析，在（11.10）式中略去结构的阻尼，则得到：

$$\begin{bmatrix}\hat{M}_e & \hat{M}_{e\delta}\\ \hat{M}_{\delta e} & \hat{M}_{\delta\delta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_e\\ \ddot{\eta}_\delta\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{K}_e & \hat{K}_{e\delta}\\ \hat{K}_{\delta e} & \hat{K}_{\delta\delta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_e\\ \eta_\delta\end{Bmatrix}+\overline{q}\begin{bmatrix}\mathrm{Q}_e(k) & \mathrm{Q}_{e\delta}(k)\\ \mathrm{Q}_{\delta e}(k) & Q_{\delta\delta}(k)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_e\\ \eta_\delta\end{Bmatrix}=\{0\} \quad (11.11)$$

实际飞机的操纵面都使用了伺服操纵系统，除全动平尾操纵面情况外，一般操纵面的偏转频率较高。可在（11.11）式中忽略操纵面伺服运动方程部分，即最后一行，可得：

$$\begin{bmatrix}\hat{M}_e & \hat{M}_{e\delta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_e\\ \ddot{\eta}_\delta\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{K}_e & \hat{K}_{e\delta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_e\\ \eta_\delta\end{Bmatrix}+\overline{q}\begin{bmatrix}Q_e(k) & Q_{e\delta}(k)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_e\\ \eta_\delta\end{Bmatrix}=\{0\} \quad (11.12)$$

对（11.12）式进行拉氏变换，并令$s=j\omega$，可求得图 11-2 中弹性飞机环节的频域传递函数：

$$TF_{plant}：\{\mathrm{G}_p(j\omega)\}=\frac{\{\eta_e\}}{\eta_\delta}=-[\mathrm{D}_e]^{-1}\{\mathrm{D}_{e\delta}\} \quad (11.13)$$

其中：

$[\mathrm{D}_e]=[\hat{M}_e]\omega^2-[\hat{K}_e]+\overline{q}\{\mathrm{Q}_e(k)\}$，　$\{\mathrm{D}_{e\delta}\}=\{\hat{M}_{e\delta}\}\omega^2-\{\hat{K}_{e\delta}\}+\overline{q}\{\mathrm{Q}_{e\delta}(k)\}$。

注意由（11.13）式得到的传递函数是个列向量，反映了舵面偏转单位角度后引起气动力变化所激励出的飞机各阶弹性振动广义坐标分量。实际上传感器所感受到的运动并非这些广义坐标分量，而是物理运动量，因此必须将这些坐标分量转换到原始物理坐标上，这一点在第 11.3 节中已经进行了讨论，不再赘述。

如果把传感器的坐标变换环节用传递函数来描述，则有：

$$TF_{sensor}：[\mathrm{H}_s(j\omega)]=\frac{q_s}{\eta_e}=[\mathrm{T}_s][\Phi]=[\mathrm{T}_s]\begin{bmatrix}\Phi_e(x) & \Phi_\delta(x)\end{bmatrix} \quad (11.14)$$

对于加速度传感器的情况，可对式（11.1）进行拉氏变换，并利用式（11.14）可得：

$$TF_{accelorator}：[\mathrm{H}_a(j\omega)]=(j\omega)^2[\mathrm{H}_s(j\omega)]/g=-\omega^2[\mathrm{T}_s]\begin{bmatrix}\Phi_e & \Phi_\delta\end{bmatrix}/g \quad (11.15)$$

由图 11-2 可知，弹性飞机环节与传感器环节具有串连关系，根据式（11.13）、（11.14）

的定义，就得到串联弹性飞机/传感器系统的传递函数：

$$TF_{ps}\ ：[G(j\omega)]=[\mathrm{G}_p(j\omega)][\mathrm{H}_s(j\omega)] \tag{11.16}$$

以后我们就不再对其加以区分，直接称（11.16）式为“舵面/飞机”环节传递函数。

至此，本节给出了广义坐标下的气动弹性方程，并对其进行了简化，推导出“舵面/飞机”环节频域传递函数表达式，如果再给出伺服控制系统的传递函数，就可以在频域进行气动伺服弹性系统的稳定性分析。下一节我们将对此进行讨论。

§11.5 气动伺服弹性频域稳定性分析

前面讲过，伺服控制系统包括飞行控制系统和液压伺服系统，其传递函数由主管飞控系统的部门提供。本节直接给出伺服控制系统的传递函数，并讨论如何进行频域内的气动伺服弹性稳定性分析。

根据上述讨论，气动伺服弹性系统由“舵面/飞机”环节和伺服控制系统组成，可将图 11-2 中的系统重新划分如图 11-6。若伺服控制系统的频域传递函数为$[H(j\omega)]$，则直接应用上节的结果，并断开图 11-6 中的比较环节，可得气动伺服弹性系统的开环频域传递函数为：

$$TF_{ASE}\ ：[G(j\omega)][H(j\omega)] \tag{11.17}$$

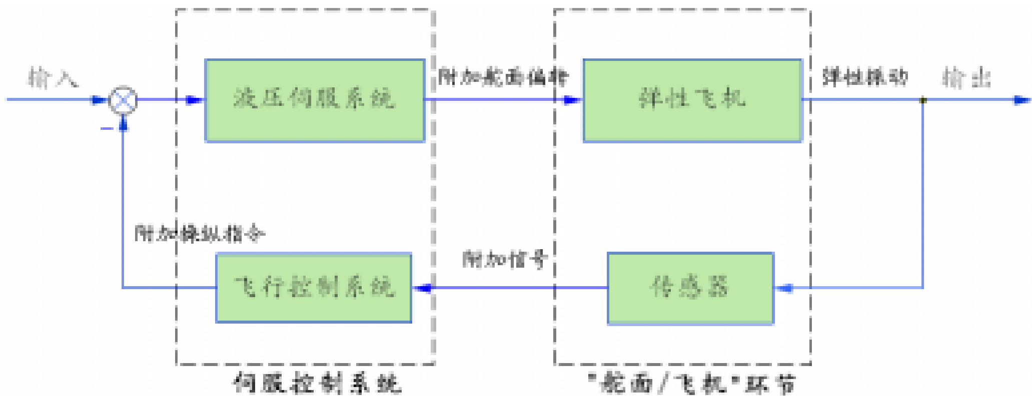


图 11-6 气动伺服弹性系统

在经典控制理论中，考察系统的开环频率特性可以研究闭环系统的稳定性。这里我们先来回顾一下控制理论中的这部分内容。

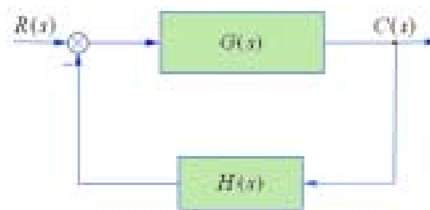


图 11-7 一般闭环反馈系统结构图

假设闭环反馈控制系统的一般结构如图 11-7 所示。其开环传递函数$G(s)H(s)=\dfrac{M(s)}{N(s)}$，

式中$M(s)$、$N(s)$为s的多项式，其最高幂次分别为m、n，且$n \ge m$。开环系统的稳定性

取决于开环系统的特征方程：

$$N(s)=0 \tag{11.18}$$

的根（即极点）的分布情况。而气动伺服弹性稳定性分析的前提就是开环系统稳定，即（11.16）式所有根均位于复平面的左半平面内。闭环系统的稳定性则取决于闭环特征方程：

$$1+G(s)H(s)=0 \tag{11.19}$$

的根的分布情况。并且（11.17）式的分子就是$M(s)+N(s)$，即闭环特征方程也可表示为：

$$N(s)+M(s)=0 \tag{11.20}$$

将（11.19）、（11.20）式联系起来有：

$$F(s)=\frac{N(s)+M(s)}{N(s)}=1+G(s)H(s) \tag{11.21}$$

在频域中（11.21）式成为：

$$F(j\omega)=1+G(j\omega)H(j\omega) \tag{11.22}$$

式（11.22）确定了开环系统频率特性和闭环特征式之间的关系。根据奈奎斯特稳定判据，闭环系统稳定的充要条件是：系统开环幅相频率特性曲线（Nyquist 图）正向（逆时针方向）包围$(-1, j\cdot 0)$点的圈数N与开环特征方程的正实部根数目P的关系满足：

$$N=P/2 \tag{11.23}$$

而我们进行稳定性分析的前提是气动伺服弹性系统是开环稳定的，即$P=0$，所以气动伺服弹性系统闭环稳定的充要条件是系统开环幅相频特性曲线不包围$(-1, j\cdot 0)$点，即：

$$N=0 \tag{11.24}$$

求得系统开环传递函数后，使用奈奎斯特判据就可以判断系统的闭环稳定性。如果闭环稳定，则还需要知道系统的稳定裕度，包括相位裕度和幅值裕度。这里我们所说的稳定裕度与控制理论中的稳定裕量是同一个概念。

如图 11-8 所示，在$[GH]$平面上，当$\omega=\omega_p$时，开环幅相频曲线与单位圆有交点P，

在此点定义系统的相位裕度γ，即如果系统对频率ω_p信号的相角延迟量增大为γ°时，则系

统将处于临界稳定状态。当 $\omega = \omega_a$ 时，开环幅相频曲线与负实轴有交点 A，在此点定义系统的幅值裕度 h，即如果此时系统增益增大到原来的 h 倍，则系统就处于临界稳定状态。依照定义，相位裕度表达式为：

$$\gamma^{\circ} = 180^{\circ} + \angle G(j\omega_p)H(j\omega_p) \tag{11.25}$$

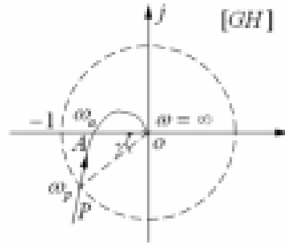


图 11-8　Nyquist 图

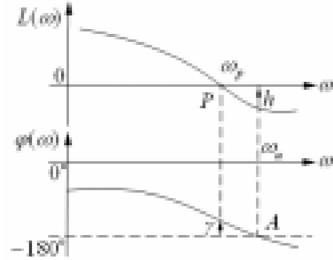


图 11-9　Bode 图

幅值裕度表达式为：

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_a)H(j\omega_a)|} \tag{11.26}$$

图 11-8 也对应着开环对数频率特性曲线（Bode 图），如图 11-9 所示。其中 P 、A 两点的意义与图 11-8 中的一样。只是在这里幅值裕度的定义采用了分贝值：

$$h = -20\lg|G(j\omega_a)H(j\omega_a)| \tag{11.27}$$

在我国的军用飞机强度和刚度规范中规定，飞机气动伺服弹性稳定裕度必须满足：幅值裕度 h 不小于 6dB，相位裕度 γ 绝对值不小于 60 度。

前面讲述了飞机气动伺服弹性稳定性分析的概念、方法和过程，这些内容同样也适用于导弹等飞行器的气动伺服弹性稳定性分析。与飞机结构相比，导弹的结构特点及气动布局使得其分析模型建立相对比较简单，本章不再赘述。

§11.6 不利耦合的排除

利用上节的内容，我们可以得到一架飞机的气动伺服弹性稳定性结果，若结果是闭环不稳定或者稳定裕度不满足强度规范的要求，则必须设法减小弹性飞机结构的振动与伺服控制反馈系统之间的不利耦合，使得设计达到要求。

根据第 11.3 节的内容我们知道，气动伺服弹性问题形成的原因是传感器受到弹性飞机振动的干扰，因此，尽量减少或消除这种干扰，就可以消除闭环反馈，避免气动伺服弹性问题的出现。所以工程中可以采取的做法有两种：一是在安装传感器时，对其安装位置进行正确

选择，即避开机身振动的影响，例如将垂直过载加速度计安装在机身一弯振型的节点位置上，将俯仰角速度陀螺安装在机身一弯振型斜率为零的位置上（如图 11-10），这可以从根本上解决问题，但在实际情况中一般不会遇到这种理想情况；另一种方法是在传感器环节后串联限幅滤波器，因为传感器输出信号中包含弹性飞机振动的干扰分量，这部分分量的频率分布是固定的，即弹性飞机振动的固有频率，使用限幅滤波器可以有效的限制这类干扰信号的幅值，使其迅速衰减至所需的很小水平（如图 11-11），从而使闭环系统达到足够的稳定裕度。

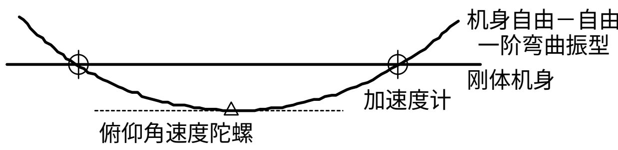


图 11-10 布置传感器的理想位置

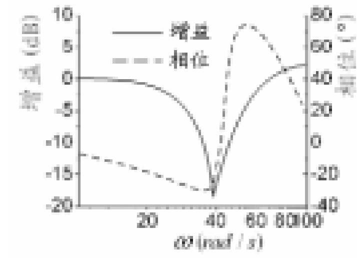


图 11-11 限幅滤波器幅频相频特性

§11.7 时域气动伺服弹性分析：状态空间法

前述频域的气动伺服弹性稳定性分析方法是建立在传递函数及频域特性的基础上的，而传递函数及频域特性均属于系统的外部描述，不能充分反映系统内部的状态。它在本质上是复频域法，原则上只适用于单输入、单输出、线性定常系统的稳定性问题，对于多输入、多输出系统，尤其是对时变、非线性系统的稳定性分析是无能为力的。

现代控制理论正是为了克服经典控制理论频域分析的局限性而逐步发展起来的。通常认为其产生的主要标志是卡尔曼（Kalman）提出的可控性和可观测性概念以及庞特里亚金（Понтрягин）提出的极大值原理。现代控制理论主要包括三个基本内容：多变量线性系统理论、最优控制理论以及最优估计与系统辨识理论。本章主要应用多变量线性系统理论，来进行时域的气动伺服弹性稳定性分析。

现代控制理论本质上是一种时域方法。由于它引入了“状态”的概念，用“状态变量”及“状态方程”来描述动态系统，因而更能充分反映出系统的内在本质与特性。随着载荷减缓及主动气动弹性机翼概念的提出和发展，先进控制律设计以及最优控制理论的应用，要求建立时域气动伺服弹性模型，使用状态空间方法来研究气动伺服弹性系统的稳定性和响应特性。

作为学习这部分内容的预备，我们先来了解状态、状态变量和状态空间的概念。

状态：系统的状态是指它过去、现在和将来所处的状况，例如单自由度弹簧－质块系统中的质块在某时刻的位移、速度、加速度。

状态变量：系统的状态变量是指可以完全确定系统所处状态、且数目最小的一组变量。假如用 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 来表示系统的状态变量，必须满足如下条件：

（1）在任何时刻$t = t_0$，状态变量在t_0时刻的值$x_i(t_0), i = 1,2,3,\cdots,n$，即完全确定了系统在该时刻的状态。

（2）一旦已知$x_i(t_0), i = 1,2,3,\cdots,n$以及系统的输入$u(t), t \geq t_0$，则系统的响应就可完全确定。

仍以单自由度弹簧－质块系统为例，已知某一时刻质块的位移和速度，那么系统的状态或者说能量分布就完全确定下来，以此作为初始条件，当一确定的外激励作用于系统上，则其受迫振动响应可以通过求解微分方程得到。系统的位移和速度就可以作为系统的状态变量。

状态向量：系统的状态变量$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$所构成的列向量$\mathbf{x}(t)$就称为该系统的状态向量，记为$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$，上标“T”表示矩阵转置符号。对于一般的系统，状态向量并不唯一，例如单自由度弹簧－质块系统，其状态至少包括质块的位移、速度、加速度，三者取其二即可组成状态向量，在建模时应视实际情况而定。

状态空间：以状态变量$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$为$n$个坐标轴所构成的$n$维空间称为状态空间。即系统在任何时刻的状态就可以用状态空间的点来表示，其运动也就是状态空间中点的运动。

状态方程：描述系统状态变量与输入、输出之间关系的一阶微分方程组称为系统的状态方程。

图 11-12 就给出了一般反馈控制系统的方块图表示。按照方块图的信号流，定义输入信号：

$$\{\mathrm{u}\} = \{\mathrm{r}\} - [\mathrm{G}]\{\mathrm{y}\} \tag{11.28}$$

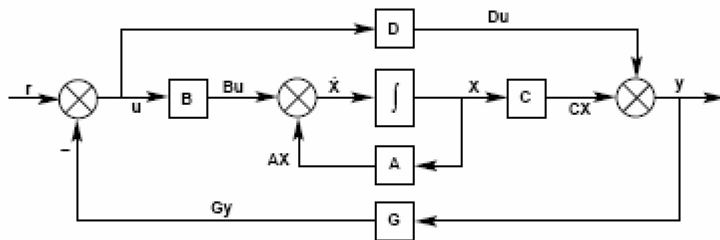


图 11-12 状态空间反馈控制系统

状态空间方程为：

$$\begin{aligned}\{\dot{\mathrm{x}}\} &= [\mathrm{A}]\{\mathrm{x}\} + [\mathrm{B}]\{\mathrm{u}\} \\ \{\mathrm{y}\} &= [\mathrm{C}]\{\mathrm{x}\} + [\mathrm{D}]\{\mathrm{u}\}\end{aligned} \tag{11.29}$$

下一节将介绍如何建立气动伺服弹性系统的时域模型。

§11.8 时域气动弹性模型

重新考察（11.10）式，其中广义气动力系数矩阵$[Q(k)]$是减缩频率k的函数，要建立时

域内的气动伺服弹性运动方程，首先要求得时域广义气动力矩阵的表达式。目前得到广泛使用的方法是对已知的频域广义气动力$[Q(k)]$进行有理函数拟合，得到非定常气动力的拉氏域表达式，从而也就得到其时域表示。拟合的方法有 Roger 法、修正的矩阵 Padé 法、最小状态法等，这里我们仅介绍 Roger 法。

将广义气动力矩阵$[Q(k)]$表示成 Padé 多项式：

$$[\mathrm{Q}(k)] = [\mathrm{A}_0] + jk[\mathrm{A}_1] + (jk)^2[\mathrm{A}_2] + \sum_{i=1}^{l} \frac{jk}{jk+\beta_i}[\mathrm{A}_{i+2}] \tag{11.30}$$

其中β_i表示气动力延迟项，共有l项，一般事先给出。且$jk = j\omega b/V = sb/V$，因此（11.30）式可由频域直接扩展到拉氏域。问题在于如何拟合出系数矩阵$[A_i], i = 0,1,2,\cdots,l+2$。为简明起见，令$l = 2$，则只有两个气动力延迟项$\beta_i,(i = 1,2)$。而：

$$\frac{jk}{jk+\beta_j} = \frac{k^2}{k^2+\beta_j^2} + \frac{jk\beta_j}{k^2+\beta_j^2} \tag{11.31}$$

按照（11.31）式的形式可以把（11-30）的实部和虚部分离如下：

$$[\widetilde{\mathrm{Q}}_{\mathrm{R}}(k)] = ([\mathrm{Q}_{\mathrm{R}}(k)] - [\mathrm{A}_0]) = \begin{bmatrix} -k^2[\mathrm{I}] & \dfrac{k^2}{k^2+\beta_1^2}[\mathrm{I}] & \dfrac{k^2}{k^2+\beta_2^2}[\mathrm{I}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_3 \\ \mathrm{A}_4 \end{bmatrix} = [\mathrm{S}_{\mathrm{R}}(k)][\widetilde{\mathrm{A}}] \tag{11.32}$$

$$[\widetilde{\mathrm{Q}}_{\mathrm{I}}(k)] = (\frac{[\mathrm{Q}_{\mathrm{I}}(k)]}{k} - [\mathrm{A}_1]) = \begin{bmatrix} [0] & \dfrac{\beta_1}{k^2+\beta_1^2}[\mathrm{I}] & \dfrac{\beta_2}{k^2+\beta_2^2}[\mathrm{I}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_3 \\ \mathrm{A}_4 \end{bmatrix} = [\mathrm{S}_{\mathrm{I}}(k)][\widetilde{\mathrm{A}}] \tag{11.33}$$

对于一个很小的值$k = k_1 \to 0$，由（11.32）和（11.33）式可得：

$$[\mathrm{A}_0] = [\mathrm{Q}_{\mathrm{R}}(k_1)] \tag{11.34}$$

$$[\mathrm{A}_1] = \frac{[\mathrm{Q}_{\mathrm{I}}(k_1)]}{k_1} - \frac{[\mathrm{A}_3]}{\beta_1} - \frac{[\mathrm{A}_4]}{\beta_2} \tag{11.35}$$

然后将（11.35）式带入（11.33）式中，则$[\mathbf{A}_3],[\mathbf{A}_4]$就可以确定了。这种做法虽然简单，但是得到的结果对$\beta_i$的选择将会很敏感，实际上$\mathbf{A}_1$是气动阻尼阵，如果能够采用实测系数值，在（11.30）式中可以不引入气动力延迟项，结果自然就与β_i不相干了。

实际分析中，我们使用下面的过程来对（11.30）式进行处理。

对一系列的减缩频率值k_i，计算式（11.32)、(11.33）并联立如下：

$$
\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_R(k_2) \\ \widetilde{Q}_I(k_2) \\ \vdots \\ \widetilde{Q}_R(k_n) \\ \widetilde{Q}_I(k_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_R(k_2) \\ S_I(k_2) \\ \vdots \\ S_R(k_n) \\ S_I(k_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \tag{11.36}
$$

或简记为：

$$
[\widetilde{Q}] = [S][\widetilde{A}] \tag{11.37}
$$

这是个矛盾方程组，其最小二乘解为：

$$
[\widetilde{A}] = ([S^T][S])^{-1}[S]^T[\widetilde{Q}] \tag{11.38}
$$

从而就得到了$[A_2], [A_3], [A_4]$，如果需要的话，这个过程也很容易扩展到更多延迟项的情况。将（11.30）式带入（11.7）式，并且注意到$jk(= j\omega b/V = sb/V)$，则有：

$$
[\hat{M}]\{\ddot{\eta}\}+[\hat{C}]\{\dot{\eta}\}+[\hat{K}]\{\eta\}+\overline{q}\left([A_0]\{\eta\}+\left(\frac{sb}{V}\right)[A_1]\{\eta\}+\left(\frac{sb}{V}\right)^2[A_2]\{\eta\}+\sum_{i=1}^{l}[A_{i+2}]\{x_i\}\right)=\{\hat{P}(t)\} \tag{11.39}
$$

将（11.39）式进行整理，可得：

$$
([\hat{K}]+\overline{q}[A_0])\{\eta\}+\left[[\hat{C}]+\overline{q}\left(\frac{b}{V}\right)[A_1]\right]\{\dot{\eta}\}+\left[[\hat{M}]+\overline{q}\left(\frac{b}{V}\right)^2[A_2]\right]\{\ddot{\eta}\}+\overline{q}\sum_{i=1}^{l}[A_{i+2}]\{x_i\}=\{\hat{P}(t)\} \tag{11.40}
$$

或简记为：

$$
[\overline{K}]\{\eta\}+[\overline{C}]\{\dot{\eta}\}+[\overline{M}]\{\ddot{\eta}\}+\overline{q}\sum_{i=1}^{l}[A_{i+2}]\{x_i\}=\{\hat{P}(t)\} \tag{11.41}
$$

其中：

$$
\{\mathbf{x}_i\} = \frac{\left(\frac{sb}{V}\right)}{\left(\frac{sb}{V}\right)+\beta_i}\{\eta\} \tag{11.42}
$$

从上式可得微分方程式：

$$\{\dot{x}_i\}+\left(\frac{V}{b}\right)\beta_i\{x_i\}=\{\dot{\eta}\} \tag{11.43}$$

为简明起见，仍然令$l=2$，将（11.41)、(11.43）式写成矩阵方程形式：

$$\begin{bmatrix} [I] & & & \\ & [\overline{M}] & & \\ & & [I] & \\ & & & [I] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & [I] & 0 & 0 \\ -[\overline{K}] & -[\overline{C}] & -\overline{q}[A_3] & -\overline{q}[A_4] \\ 0 & I & -\dfrac{V}{b}\beta_1[I] & 0 \\ 0 & I & 0 & -\dfrac{V}{b}\beta_2[I] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{P}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.44}$$

不计外扰力，上式可记为：

$$[M']\{\dot{X}'\}=[K']\{X'\} \tag{11.45}$$

从上式可得：

$$\{\dot{X}'\}=([M'])^{-1}[K']\{X'\}=[R]\{X'\} \tag{11.46}$$

状态向量$\mathbf{X}'$中的变量可以重新排列如下：

$$\{X''\}=\left[(\eta_r \quad \eta_e \quad \dot{\eta}_r \quad \dot{\eta}_e \quad x_1 \quad x_2) \quad (\eta_\delta \quad \dot{\eta}_\delta)\right]=[\hat{X} \quad u] \tag{11.47}$$

则方程（11.46）可重组如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{u} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_{I,I} & R_{I,II} \\ R_{II,I} & R_{II,II} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{X} \\ u \end{bmatrix} \tag{11.48}$$

在（11.48）式中，第一行表示飞机气动弹性动力学方程，第二行表示操纵面动力学方程。飞机气动弹性动力学状态空间方程即为：

$$\{\dot{\hat{X}}\}=[\hat{A}]\{\hat{X}\}+[\hat{B}]\{u\} \tag{11.49}$$

其中$[\hat{A}]\{\hat{X}\}$、$[\hat{B}]\{u\}$两项分别代表飞机结构动力和操纵面运动产生的控制力。

§11.9 坐标变换——体轴系下的气动弹性状态空间模型

下一步工作就是将伺服控制系统状态空间方程与（11.49）式耦合起来。注意（11.49）式中状态变量包括刚体运动坐标，这里要说明以下，该坐标属于地轴系即惯性坐标系，而飞行力学中习惯使用与机身固定的体轴系。为了使气动弹性方程与伺服控制系统方程兼容，必须

将气动弹性方程中的刚体坐标从地轴系变换到体轴系（而弹性坐标则无需变换）。

（11.49）式中对应刚体运动部分的状态方程为：

$$\{\dot{x}_{Ir}\}=[A_r]\{x_{Ir}\}+[B_r]\{u\} \tag{11.50}$$

下面直接给出地轴系和体轴系之间的变换公式，不对其进行具体推导。

$$\{x_{Ir}\}=[T_1]\{x_{Br}\} \tag{11.51}$$

地轴系下的刚体运动状态向量为$\{x_{Ir}\}^T=[x,y,z,\phi,\theta,\psi,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi}]$，其中各分量分别表示飞机质心位置坐标、飞机姿态角（机体轴对地轴的欧拉角）、线速度和角速度。

体轴系下的刚体运动状态向量为$\{x_{Br}\}^T=[x',y',z',\phi',\theta',\psi',u,v,w,p,q,r]$。

$$[T_1]=\begin{bmatrix}[\Gamma_1] & 0 & 0 & 0\\ 0 & [I] & 0 & 0\\ 0 & [\widetilde{\Lambda}_1] & [\Gamma_1] & 0\\ 0 & [\widetilde{\Lambda}_2] & 0 & [\Gamma_2]\end{bmatrix} \tag{11.52}$$

其中各子矩阵详见附录。

类似地，地轴坐标下的速度状态方程可写为：

$$\{\dot{x}_{Ir}\}=[T_2]\{\dot{x}_{Br}\}+[T_3]\{x_{Br}\} \tag{11.53}$$

其中：

$$[T_2]=\begin{bmatrix}[\Gamma_1] & 0 & 0 & 0\\ 0 & [\Gamma_2] & 0 & 0\\ [\Gamma_1][\widetilde{\Omega}] & [\Gamma_1][\widetilde{\Lambda}_1] & [\Gamma_1] & 0\\ 0 & 0 & 0 & [\Gamma_2]\end{bmatrix} \tag{11.54}$$

$$[T_3]=\begin{bmatrix}0 & [\widetilde{\Lambda}_1] & 0 & 0\\ 0 & [\widetilde{\Lambda}_2] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{11.55}$$

在方程（11.49）中无需对弹性模态的广义坐标进行变换，因此对（11.49）式的坐标变换阵为：

$$[\widetilde{T}_1]=\begin{bmatrix}[T_1] & \\ & [I]\end{bmatrix},\ [\widetilde{T}_2]=\begin{bmatrix}[T_2] & \\ & [I]\end{bmatrix},\ [\widetilde{T}_3]=\begin{bmatrix}[T_3] & \\ & [I]\end{bmatrix} \tag{11.56}$$

利用上述矩阵将地轴坐标变转换成体轴坐标，则（11.49）式转换为：

$$\{\dot{X}\}=[\widetilde{T}_2]^{-1}([\hat{A}][\widetilde{T}_1]-[\widetilde{T}_3])\{X\}+[\widetilde{T}_2]^{-1}[\hat{B}]\{u\}=[A]\{X\}+[B]\{u\} \qquad (11.57)$$

前面讲过，位移传感器的输出量可表示为：

$$\{q_s\}=[T_s][\Phi]\{\eta\}=[C_0]\{X\} \qquad (11.58)$$

其中$[C_0]=[[T_s][\Phi]\quad[0]\quad[0]\quad[0]]$，类似地有速度传感器和加速度传感器的输出为：

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_s\\ \ddot{q}_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[T_s][\Phi]\{\dot{\eta}\}\\ [T_s][\Phi]\{\ddot{\eta}\}\end{bmatrix}=[C_1]\{\dot{X}\} \qquad (11.59)$$

其中：

$$[C_1]=\begin{bmatrix}[T_s][\Phi] & [0] & [0] & [0]\\ [0] & [T_s][\Phi] & [0] & [0]\end{bmatrix}。$$

将（11.57）式两边前乘$[\mathbf{C}_1]$得：

$$[C_1]\{\dot{X}\}=[C_1][A]\{X\}+[C_1][B]\{u\}=[C_2]\{X\}+[D_2]\{u\} \qquad (11.60)$$

结合（11.58）～（11.60）式，得到如下输出方程：

$$\{y\}=\begin{bmatrix}q_s\\ \dot{q}_s\\ \ddot{q}_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[C_0]\\ [C_2]\end{bmatrix}\{X\}+\begin{bmatrix}[0]\\ [D_2]\end{bmatrix}\{u\} \qquad (11.61)$$

或者记为：

$$\{y\}=[C]\{X\}+[D]\{u\} \qquad (11.62)$$

这就是传感器输出与机体运动及操纵面运动之间的关系。

经过坐标变换和传感器输出关系我们得到了体轴系下的飞机气动弹性运动状态方程式（11.57）、（11.62）。下面介绍如何将伺服控制环节的状态方程与飞机气动弹性运动状态方程耦合起来。

§11.10 气动伺服弹性状态空间模型

上节得到了完整的飞机气动弹性状态空间方程式（11.57），以及传感器输出方程式（11.62），要利用其进行气动伺服弹性分析，必须增加相关的模拟元件（如作动器、传感器、限幅滤波器和前置滤波器等）和操纵系统的状态量。若将其中某个元件的状态空间方程表示

为：

$$\{\dot{X}^{(i)}\}=[A^{(i)}]\{X^{(i)}\}+[B^{(i)}]\{u^{(i)}\} \tag{11.63}$$

$$\{y^{(i)}\}=[C^{(i)}]\{X^{(i)}\}+[D^{(i)}]\{u^{(i)}\} \tag{11.64}$$

方程（11.63)、(11.64）可以通过某种途径耦合进入原始方程（11.57)、(11.62）中，这里我们介绍一种典型的情况，如果飞机状态方程的输出量恰好作为这个元件的输入（例如某个传感器元件)，那么耦合形式如下：

$$\{u^{(i)}\}=\{y\} \tag{11.65}$$

则：

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}^{(i)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [B^{(i)}][C] & [A^{(i)}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ X^{(i)} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} [B^{(i)}] \\ [B^{(i)}][D] \end{bmatrix}\{u\} \tag{11.66}$$

或者记为：

$$\{\dot{X}_{(i)}\}=[A_{(i)}]\{X_{(i)}\}+[B_{(i)}]\{u\} \tag{11.67}$$

同样有：

$$\begin{bmatrix} y \\ y^{(i)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [D^{(i)}][C] & [C^{(i)}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ X^{(i)} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} [D] \\ [D^{(i)}][D] \end{bmatrix}\{u\} \tag{11.68}$$

或者记为：

$$\{y_{(i)}\}=[C_{(i)}]\{X_{(i)}\}+[D_{(i)}]\{u\} \tag{11.69}$$

（11.69）式就是状态方程形式的传感器输出表达式。

任何模拟元件，包括控制系统，皆可按这种方式耦合进入气动伺服弹性状态方程。再考察图 11-12 所示典型反馈控制系统，也可用来描述一般的气动伺服弹性模型，对其反馈方程和状态空间方程（11.28)、(11.29）式进行拉氏变换，有如下关系式：

$$\{u(s)\}=\{r(s)\}-[G(s)]\{y(s)\} \tag{11.70}$$

$$s\{X(s)\}=[A]\{X(s)\}+[B]\{u(s)\} \tag{11.71}$$

$$\{y(s)\}=[C]\{X(s)\}+[D]\{u(s)\} \tag{11.72}$$

进一步可从（11.71）式得：

$$\{X(s)\}=(s[I]-[A])^{-1}[B]\{u(s)\} \tag{11.73}$$

将（11.73）式带入（11.72）式中有：

$$\{y(s)\}=([C](s[I]-[A])^{-1}[B]+[D])\{u(s)\}=[H(s)]\{u(s)\} \tag{11.74}$$

其中$[H(s)]$就是模拟控制器的等效开环传递函数，也就是不带飞控系统的开环传递函数。将（11.74）式代入（11.70）式中有：

$$\{u(s)\}=\{r(s)\}-[G(s)][H(s)]\{u(s)\} \tag{11.75}$$

即：

$$\{u(s)\}=([I]+[G(s)][H(s)])^{-1}\{r(s)\} \tag{11.76}$$

再将其代入（11.74）式可得：

$$\{y(s)\}=\left([H(s)]([I]+[G(s)][H(s)])^{-1}\right)\{r(s)\}=[\hat{H}(s)]\{r(s)\} \tag{11.77}$$

$[\hat{H}(s)]$就是所谓的闭环传递函数矩阵。根据传递矩阵$[H(s)]$、$[\hat{H}(s)]$就可以进行系统的伺服稳定性分析，对这部分内容不再作详细讨论。

注意到（11.73）式对应着特征值问题：

$$\left|s[I]-[A]\right|=0 \tag{11.78}$$

给定一系列感兴趣的减缩频率k值并求解之，考察特征根实部符号的变化来判断系统的稳定性，这就是所谓的伺服颤振问题或有控颤振问题。

至此可以看出，气动伺服弹性稳定性分析包含两个方面，一个是伺服颤振问题，即考虑闭环控制飞机的颤振稳定特性，另一个是闭环控制飞机的伺服控制稳定特性。前者关心在哪个速度下飞机发生闭环颤振，而后者则考虑在某个飞行状态下，受控飞机还具有多少稳定裕度。

【附录】惯性系到体轴系的变换

在气动弹性分析中，一般在惯性参考系进行自由－自由弹性飞机的模态分析和非定常气动力计算；而在控制设计和稳定性分析中则更偏好使用体轴系。约定体轴下的线速度符号 U,V,W 和角速度符号 P,Q,R，在某个平衡状态下，飞机姿态角即体轴系相对惯性系的欧拉角为（Ψ,Θ,Φ），则在体轴下及惯性系下的飞机重心处线速度有如下关系：

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{Bmatrix}_I = \Gamma(\Psi,\Theta,\Phi)\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_B \quad \text{(A-1)}$$

其中：

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & \cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi-\sin\Psi\cos\Phi & \cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi+\sin\Psi\sin\Phi \\ \sin\Psi\cos\Theta & \sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi+\cos\Psi\cos\Phi & \sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi-\cos\Psi\sin\Phi \\ -\sin\Theta & \cos\Theta\sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix} \quad \text{(A-2)}$$

类似地有线加速度变换关系：

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{Bmatrix}_I = \Gamma(\Psi,\Theta,\Phi)\left[\begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} + \Omega\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}\right]_B = \Gamma(\Psi,\Theta,\Phi)\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}_B \quad \text{(A-3)}$$

其中 $\mathbf{\Omega}$ 是斜对称角速度矩阵，体轴系下的加速度为：

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}_B &= \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} + \Omega\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -RV+QW \\ RU-PW \\ -QU+PV \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \text{(A-4)}$$

对于某个平衡位置，其对应欧拉方位角 (Φ_1,Θ_1,Ψ_1)，在体轴系下各坐标为：

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \Phi_1 \\
\Theta &= \Theta_1 \\
U &= U_1 \\
V &= V_1 \\
W &= W_1 \\
P &= P_1 \\
Q &= Q_1 \\
R &= R_1
\end{aligned} \tag{A-5}
$$

加入小扰动量后，各坐标变为：

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \Phi_1 + \phi \\
\Theta &= \Theta_1 + \theta \\
U &= U_1 + u \\
V &= V_1 + v \\
W &= W_1 + w \\
P &= P_1 + p \\
Q &= Q_1 + q \\
R &= R_1 + r
\end{aligned} \tag{A-6}
$$

扰动后在地轴系下的线速度为：

$$
\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \Gamma_1 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \overline{\Lambda}_1 \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} \tag{A-7}
$$

其中：

$$
\Gamma_1 = \Gamma(\Phi_1, \Theta_1, \Psi_1) \tag{A-8}
$$

$$
\overline{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_{x,\phi} & \Lambda_{x,\theta} & \Lambda_{x,\psi} \\ \Lambda_{y,\phi} & \Lambda_{x,\theta} & \Lambda_{x,\psi} \\ \Lambda_{z,\phi} & \Lambda_{x,\theta} & \Lambda_{x,\psi} \end{bmatrix} \tag{A-9}
$$

矩阵各元素为：

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{x,\phi} &= V_1(\cos\Phi_1 \sin\Theta_1 \cos\Psi_1 + \sin\Phi_1 \sin\Psi_1) \\
&\quad + W_1(\cos\Phi_1 \sin\Psi_1 - \sin\Phi_1 \sin\Theta_1 \cos\Psi_1) \\
\Lambda_{x,\theta} &= -U_1 \sin\Theta_1 \cos\Psi_1 + V_1 \sin\Phi_1 \cos\Theta_1 \cos\Psi_1 + W_1 \cos\Phi_1 \cos\Theta_1 \cos\Psi_1 \\
\Lambda_{x,\psi} &= -U_1 \cos\Theta_1 \sin\Psi_1 - V_1(\sin\Phi_1 \sin\Theta_1 \sin\Psi_1 + \cos\Phi_1 \cos\Psi_1) \\
&\quad + W_1(\sin\Phi_1 \cos\Psi_1 - \cos\Phi_1 \sin\Theta_1 \sin\Psi_1) \\
\Lambda_{y,\phi} &= V_1(\cos\Phi_1 \sin\Theta_1 \sin\Psi_1 - \sin\Phi_1 \cos\Psi_1) \\
&\quad - W_1(\sin\Phi_1 \sin\Theta_1 \sin\Psi_1 + \cos\Phi_1 \cos\Psi_1) \\
\Lambda_{y,\theta} &= -U_1 \sin\Theta_1 \sin\Psi_1 + V_1 \sin\Phi_1 \cos\Theta_1 \sin\Psi_1 + W_1 \cos\Phi_1 \cos\Theta_1 \sin\Psi_1 \\
\Lambda_{y,\psi} &= U_1 \cos\Theta_1 \cos\Psi_1 + V_1(\sin\Phi_1 \sin\Theta_1 \cos\Psi_1 - \cos\Phi_1 \sin\Psi_1) \\
&\quad + W_1(\cos\Phi_1 \sin\Theta_1 \cos\Psi_1 + \sin\Phi_1 \sin\Psi_1) \\
\Lambda_{z,\phi} &= V_1 \cos\Phi_1 \cos\Theta_1 - W_1 \sin\Phi_1 \cos\Theta_1 \\
\Lambda_{z,\theta} &= -U_1 \cos\Theta_1 - V_1 \sin\Phi_1 \sin\Theta_1 - W_1 \cos\Phi_1 \sin\Theta_1 \\
\Lambda_{z,\psi} &= 0
\end{aligned} \tag{A-10}
$$

扰动后体轴系下的加速度为：

$$
\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \overline{\Omega} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \overline{\Lambda} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \tag{A-11}
$$

$$
\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 & Q_1 \\ R_1 & 0 & -P_1 \\ -Q_1 & P_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & W_1 & -V_1 \\ -W_1 & 0 & U_1 \\ V_1 & -U_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A-12}
$$

则扰动后在地轴系下的加速度为：

$$
\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}_I = \Gamma_1 \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}_B = \Gamma_1 \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \Gamma_1 \overline{\Omega} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \Gamma_1 \overline{\Lambda} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \tag{A-13}
$$

地轴系下刚体运动状态方程为：

$$
\dot{x}_{Ir} = A_r x_{Ir} + B_r u \tag{A-14}
$$

而体轴系下刚体运动状态位移向量可通过如下变换公式得到，不对其进行具体推导。

$$
x_{Ir} = T_1 x_{Br} \tag{A-15}
$$

即：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = T_1 \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \phi' \\ \theta' \\ \psi' \\ u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \tag{A-16}$$

其中上标“ $(\ )'$ ”表示地轴系下质心位移在体轴系上的投影。其中：

$$T_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda}_1 & \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda}_2 & 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \tag{A-17}$$

且：

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi_1 \tan\Theta_1 & \cos\Phi_1 \tan\Theta_1 \\ 0 & \cos\Phi_1 & -\sin\Phi_1 \\ 0 & \dfrac{\sin\Phi_1}{\cos\Theta_1} & \dfrac{\cos\Phi_1}{\cos\Theta_1} \end{bmatrix}, \overline{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \tan\Theta_1 & \dfrac{\dot{\Psi}_1}{\cos\Theta_1} & 0 \\ -\dot{\Psi}_1 \cos\Theta_1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\dot{\Theta}_1}{\cos\Theta_1} & \dot{\Psi}_1 \tan\Theta_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A-18}$$

类似地，体轴系下刚体运动状态速度向量可通过如下变换公式得到

$$\dot{\mathbf{x}}_{Ir} = \mathbf{T}_2 \dot{\mathbf{x}}_{Br} + \mathbf{T}_3 \mathbf{x}_{Br} \tag{A-19}$$

式中

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ \Gamma_1\overline{\Omega} & \Gamma_1\overline{\Lambda} & \Gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\Lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A-20}$$

对于弹性模态运动状态和气动力状态向量无需进行坐标变换，最终刚体运动状态向量转化关系如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_{Ir} &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_{Ir} + \mathbf{B}_r \mathbf{u} \\
\dot{\mathbf{x}}_{Br} &= \mathbf{T}_2^{-1}(\mathbf{A}_r \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_3)\mathbf{x}_{Br} + \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{B}_r \mathbf{u} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}_{Br} + \mathbf{B}\mathbf{u}
\end{aligned}
\qquad \text{(A-21)}
$$

参考文献

[1] 《*Past and Future Progress in Fixed and Rotary Wing Aeroelasticity*》, G. T. S. Done, Aeronautical Journal, Vol. 100, No. 997, Aug./Sept. 1996, p. 269~279.

[2] 《*Introduction to The Study of Aircraft Vibration and Flutter*》, R. H. Scanlan and R. Rosenbaum, The MacMillan Company, 1951.

[3] 《*Effect of Stabilizer Dihedral and Static Lift on T-tail Flutter*》, W. P. Jennings and M. A. Berry, Journal of Aircraft, April 1977, p. 364~367.

[4] 《气动弹性试验》，管德主编，北京航空学院出版社，1986.

[5] 《飞机气动弹性力学手册》，管德主编，航空工业出版社，1993.

[6] 《*An Introductory Guide to Literature in Aeroelasticity*》, R. S. Battoo, Aeronautical Journal, Nov. 1999, p. 511~518.

[7] Gupta, K. K., *STARS—An Integrated Multidisciplinary, Finite-Element,Structural, Fluids*, Aeroelastic,and Aeroservoelastic Analysis Computer Program, NASA TM-4795, May 1997.

[8] Gupta, K. K., Brenner, M. J., and Voelker, L. S., *Development of an Integrated Aeroservoelastic Analysis Program and Correlation With Test Data*, NASA TP-3120, May 1991.